ثانوية حمدان خوجة – المشرية – 24 فبراير 2008

الإختبار الثاني في الرياضيات

السنة الثالثة شعبة العلوم التجريبية **المدة :3 ساعات**

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) معادلته:

$2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط $A(3, 2, 6)$; $B(1, 2, 4)$; $C(4, -2, 5)$

1) بين أن المستوي (ABC) هو المستوي (P).

2) أثبت أن المثلث ABC قائم في A.

3) أكتب التمثيل الوسيطي المستقيم (d) المار بالنقطة O و العمودي على (P).

التمرين الثاني:

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + (2 - 3i)z - 5(1 + i) = 0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب: $z_A = 1 + 2i$; $z_B = -3 + i$; $z_C = 6i$.

أ) أكتب على الشكل الجبري و الشكل المثلثي العدد المركب $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = -\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + \dfrac{3}{4} ; n \geq 0 \end{cases}$$

1 – أحسب U_1 و U_2.

2 – أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$: $U_n < 1$.

– ب) أدرس تغيرات المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$.ما ذا تستنتج ؟

3 – لتكن المتتالية العددية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $V_n = U_n - 1$.

أ) بين أن المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول V_0.

ب) أحسب V_n و U_n بدلالة n.ثم أحسب نهاية المتتالية (U_n).

جـ) أحسب المجموع $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n$

التمرين الرابع:

I) نعتبر g دالة عددية معرفة كما يلي : $g(x) = e^{x}(1-x)+1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}+1} + 2$.

و ليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نأخذ الوحدة 1 cm بالنسبة إلى محور الفواصل و 2cm بالنسبة لمحور التراتيب.

1. بين $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم أوجد حصرا للعدد $f(\alpha)$.
2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. بين أن المستقيم $(d) : y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
4. أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .
5. أنشئ المنحنى (C_f).
6. ناقش بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعدلة $(m-2)(e^{x}+2) - x = 0$.

تهنياتنا لكم بالنجاح

مع تحيات أساتذة المادة:

لعرج لعراجي - جيلا لي مالك – بوعلام بن الزاير

ثانوية حمدان خوجة – المشرية – 24 فبراير 2008

الاختبار الثاني في الرياضيات

السنة الثالثة شعبة العلوم التجريبية

سلم التنقيط

التمرين الأول:(3 ن)

(P) معادلته: $2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط $A(3,2,6)$; $B(1,2,4)$; $C(4,-2,5)$

1) المستوي (ABC) هو المستوي (P) إذا كانت النقط C,B,A تنتمي إلى (P) — 0.25

لدينا: $2 . 3 + 2 - 2 . 6 + 4 = 6 + 2 - 12 + 4 = 0$ و منه $A \in (P)$

لدينا $2 . 1 + 2 - 2\,4 + 4 = 2 + 2 - 8 + 4 = 0$ و منه $B \in (P)$ — 0.50

لدينا $2.4 + (-2) - 2 . 5 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$ و منه $C \in (P)$

و منه المستوي (ABC) هو المستوي (P) . — 0.25

2) أثبت أن المثلث ABC قائم في A.

$\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$ المثلث ABC قائم في A إذا كان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ — 0.25 + 0.25

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$ — 0.25

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 1.(-2) + (-4) . 0 + (-1) . (-2) = -2 + 0 + 2 = 0$ — 0.25

3) كتابة التمثيل الوسيطي المستقيم (d) المار بالنقطة O و العمودي على (P).

(d) عمودي على (P) فإنه يوازي الشعاع الناظمي للمستوي (P) $\vec{n}(2,1,-2)$ — 0.25

M(x,y,z) نقطة من (d) يكافئ $\overrightarrow{OM} = m\,\vec{n}$ و منه — 0.25

$$\begin{cases} x = 2m \\ y = m \\ z = -2m \end{cases}$$
و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) — 0.5

التمرين الثاني:(04 ن)

1) حل المعادلة : $z^2 + (2 - 3i)z - 5(1 + i) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

حساب المميز: $\Delta = (2 - 3i)^2 + 4 \times 5(1 + i) = 4 - 12i - 9 + 20 + 20i = +15 + 8i$ — 0.5

تعيين الجذرين التربيعيين لـ Δ ليكن $v = x + iy$ جذرا تربيعيا لـ Δ

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x^2 + y^2 = 17 \\ 2x.y = 8 \end{cases}$$
و منه
$$\begin{cases} 2x^2 = 32 \\ x.y = 4 \end{cases}$$
و منه $x^2 = 16$ — 0.25

و منه $x = 4$ أو $x = -4$ لما $x = 4$: $y = 1$ و لما $x = -4$: $y = -1$ — 0.5

ومنه $\Delta = (4 + i)^2$

إذن حلي المعادلة هما على الترتيب $z_1 = \dfrac{-(2 - 3i) - (4 + i)}{2} = -3 + i$ — 0.25

$z_2 = \frac{-(2-3i)+(4+i)}{2} = 1+2i$ 0.25

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقط C, B, A ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A = 1+2i$; $z_B = -3+i$; $z_C = 6i$.

أ) كتابة على الشكل الجبري و الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6i-1-2i}{-3+i-1-2i} = \frac{-1+4i}{-4-i} = \frac{(-1+4i)(-4+i)}{17} = \frac{4-i-16i-4}{17} = -i$$ 0.5

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1\left(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2}\right)$$ 0.5

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و منه $\frac{AC}{AB} = 1$ إذن $AC = AB$ 0.5

لدينا $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ و منه المثلث متساوي الساقين و قائم في A. 0.75

التمرين الثالث: (5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}; n \geq 0 \end{cases}$$

1 –حساب U_1 و U_2.

$$U_1 = \frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$ 0.25

$$U_2 = \frac{1}{4}.\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{32} + \frac{24}{32} = \frac{29}{32}$$ 0.25

2 – أ) إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in I\!N$: $U_n < 1$.

0.25 نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$: $U_0 < 1$ معناه $-\frac{1}{2} < 1$ و منه الخاصة صحيحة من أجل 0

0.25 نفرض صحة الخاصية من أجل n أي $U_n < 1$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $U_{n+1} < 1$

0.5 لدينا $U_n < 1$ و منه $\frac{1}{4}.U_n < \frac{1}{4}$ و منه $\frac{1}{4}.U_n + \frac{3}{4} < \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ و منه $U_{n+1} < 1$

0.25 و منه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n $U_n < 1$

– ب) دراسة تغيرات المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4} - U_n = \frac{3}{4}(1 - U_n)$$

لدينا $U_{n+1} - U_n > 0$ معناه $\frac{3}{4}(1 - U_n) > 0$ معناه $1 - U_n > 0$ أي $U_n < 1$ و منه المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ متتالية متزايدة. 0.5

بما أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN}$ متزايدة و محدودة فإنها متقاربة. 0.25

3 – لتكن المتتالية العددية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $V_n = U_n - 1$.

أ) نبين أن المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية

لدينا : $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4}Un - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}V_n$ 0.5

و منه المتتالية متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول $V_0 = -\frac{3}{2}$ 0.25

ب) حساب V_n و U_n بدلالة n.

$V_n = V_0 \cdot q^n = -\frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{4})^n$ و لدينا $U_n = V_n + 1 = -\frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{4})^n + 1$ 0.25 / 0. 25

حساب نهاية المتتالية (U_n). $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$ 0.5

جـ) حساب المجموع $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n$

$S_n = V_0 + 1 + V_1 + 1 + \ldots\ldots + V_n + 1 = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n + (1 + 1 + 1 \ldots\ldots 1)$ 0.75

$= V_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + n + 1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + n + 1 = -2(1 - (\frac{1}{4})^{n+1}) + n + 1 = 2(\frac{1}{4})^{n+1} - 1 + n$

التمرين الرابع: (8 ن)

I) نعتبر g دالة عددية معرفة كما يلي : $g(x) = e^x(1-x) + 1$.

1) دراسة تغيرات الدالة g.

$D_g = IR$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ 0.25 + 0.25 + 0.25

المشتقة : $g'(x) = e^x(1-x) - e^x = -x e^x$ 0.5

إشارة المشتقة من إشارة $-x$ و بالتالي 0.5

x	$-\infty$		0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$ 0	$-\infty$

2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$.

لدينا g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1.27 ، 1.28]$ و $g(1.27) \cdot g(1.8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27 < \alpha < 1.28$. 0.25 + 0.25 / 0.25+

3) استنتاج إشارة $g(x)$. 0.5

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$

1. نبين $f(\alpha) = \alpha + 1$ لدينا $g(\alpha) = 0$ و منه $e^{\alpha}(1 - \alpha) + 1 = 0$ و منه $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{\alpha}+1} + 2 = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1}+1} + 2 = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$$

إيجاد حصرا للعدد $f(\alpha)$. لدينا $1.27 < \alpha < 1.28$ و منه $1.27 + 1 < \alpha + 1 < 1.28 + 1$ و منه

$$2.27 < f(\alpha) < 2.28$$

0.5
0.5

2. دراسة تغيرات الدالة f.

$D_f = \mathbb{R}$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$

0.25 + 0.25 + 0.25

المشتقة : $f'(x) = \dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x(1-x)+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2

0.5
0.25
0.5

3. نبين أن المستقيم $(d) : y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x+1} - x = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x - xe^x - x}{e^x+1} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-xe^x}{e^x+1} = 0$

4. أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

على المجال $]-\infty , 0[$ المنحنى فوق (d)

على المجال $]0 , +\infty[$ المنحنى أسفل (d) لما x = 0 المنحنى يقطع (d) في نقطة A(0,2)

0.5
0.5

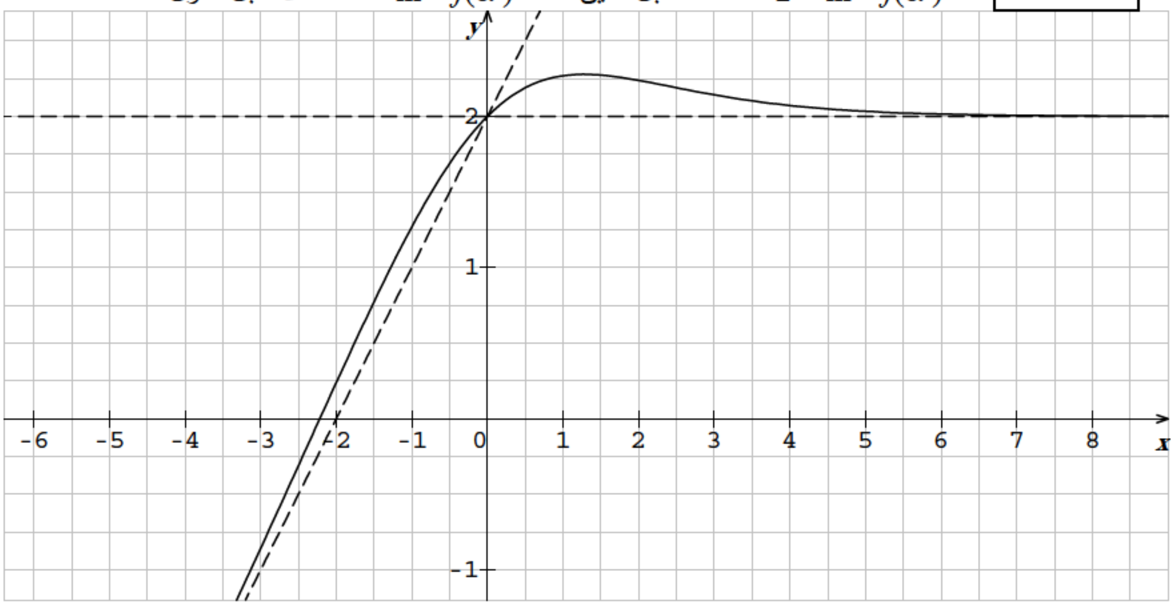
5. انشاء المنحنى (C_f).

6. ناقش بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعدلة $(m-2)(e^x+1) - x = 0$.

بعد التبسيط لدينا $m = f(x)$ و منه لما m<2 المعادلة تقبل حلا وحيد لما m = 2 المعادلة تقبل حلا وحيدا 0

لما $2 < m < f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين لما $m > f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول

0.5
0.5



مع تحيات الأستاذ لعرج لعراجي