ثانوية الشهيد قطاش حمود بالعزيزية **يوم : 14 / 03 / 2010**

الأقسام : الثالثة علوم تجريبية

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (05 نقاط)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه1.

لتكن I مركز ثقل المربع $ADHE$ و J مركز ثقل المربع $ABCD$ ، K منتصف $[IJ]$

نعتبر المعلم $\left(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE}\right)$.

1 – عين إحداثيات النقاط I ، J ، K في المعلم $\left(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE}\right)$.

2 – بين أن النقط A ، K و G ليست في إستقامية .

3 - أ - بين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) .

ب - أعط معادلة ديكارتية للمستوي (AKG) .

جـ - تحقق أن النقطة D تنتمي للمستوي (AKG) .

التمرين 02 : (08 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ، كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1 - أدرس إتجاه تغيرات الدالة g. (لا يطلب حساب النهايات)

2 - إستنتج إشارة $g(x)$ و $\left(e^x-x\right)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-2ln\left(e^x-x\right)$.

1 - أ - تحقق أنه من أجل $x\geq 0$ ، فإن : $f(x)=x^2-2x-2ln\left(1-xe^{-x}\right)$ ، وأحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - تحقق أنه من أجل $x<0$ ، فإن : $f(x)=x^2-2ln(-x)-2ln\left(1-\dfrac{e^x}{x}\right)$، وأحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 - أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{e^x-x}\times g(x)$.

- ب - إستنتج إتجاه تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3 - في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نسمي (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f و (Δ) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

أ - أكتب معادلة المماس (Δ) .

ب - أحسب $f(1)$، $f(2)$ ، $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

جـ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ O فاصلتها α، حيث : $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$.

د - أرسم (C_f) و (Δ).

... 2 / 1 ...

التمرين 03 : (07 نقاط)

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

نعتبر النقاط A ، B و C التي لواحقها : $a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ ، $c = 4i$ ، على الترتيب .

1 ـ علم النقط A ، B و C في المعلم $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2 ـ بين أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

3 ـ عين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$.

4 ـ عين ثم أرسم مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\| \vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \right\| = 12$.

5 ـ لتكن M نقطة من المستقيم (AB).

نرمز بـ β إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ بين أن لاحقة النقطة N هي : $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

ب ـ كيف يمكن إختيار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) ؟

إنتهـــــــــــى

بالتوفيق

تذكير : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} xe^x = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

عن أساتذة المادة : س + ص

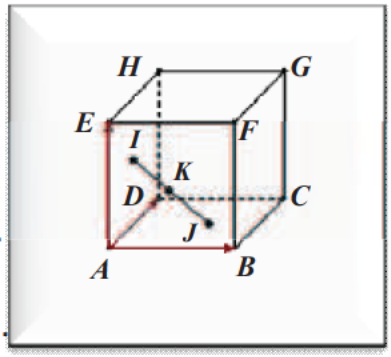
التصحيح النموذجي مع سلم التنقيط لإختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه 1.

لتكن I مركز ثقل المربع $ADHE$ و J مركز ثقل المربع $ABCD$

K منتصف $[IJ]$.

نعتبر المعلم $\left(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE}\right)$.



1 – تعيين إحداثيات النقاط I ، J ، K في المعلم $\left(A;\vec{AB};\vec{AD};\vec{AE}\right)$: 0.5

لدينا : $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AD}+\frac{1}{2}\vec{AE}$ وعليه : $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ 0.25

$\vec{Aj}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$ وعليه : $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ 0.25

K منتصف قطعة المستقيم $[IJ]$ وعليه : $K\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ 0.25

2 – لنبين أن النقط A ، K و G ليست في إستقامية :

لدينا : $\vec{AG}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CG}=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AE}$ وعليه : $G(1;1;1)$ 0.25

يكون عندئذ : $\vec{AG}(1;1;1)$ و $\vec{AK}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ 0.25

الشعاعان $\vec{AG}$ و $\vec{AK}$ غير مرتبطين خطيا وعليه النقط A ، K و G ليست في إستقامية 0.25

3 ـ أ ـ لنبين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG):

لدينا : $AI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $AJ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.25

إذن النقطة A تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

ولدينا أيضا : $GI=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $GJ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 0.25

إذن النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

ولدينا أيضا : K منتصف قطعة المستقيم $[IJ]$

إذن النقطة K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

الخلاصة : المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) 0.25

ب ـ معادلة ديكارتية للمستوي (AKG) :

بما أن المستوي (AKG) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ فإن الشعاع $\vec{IJ}\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (AKG) 0.25

معادلة المستوي (AKG) تكتب عندئذ على الشكل : $\frac{1}{2}x+0y-\frac{1}{2}z+d=0$ ، حيث d عدد حقيقي.....0.25

بما أن A تنتمي إلى المستوي (AKG) فإن : $\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}(0)+d=0$ ، أي : $d=0$ 0.25

الخلاصة : معادلة المستوي (AKG) هي : $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=0$ ، أي : $x-z=0$ 0.25

جـ ـ التحقق أن النقطة D تنتمي للمستوي (AKG) :

لدينا من جهة : $\vec{AD}=0\vec{AB}+\vec{AD}+0\vec{AE}$ وعليه : $D(0;1;0)$ 0.25

ومن جهة أخرى : $0-0=0$ ، إذن D تنتمي للمستوي (AKG) 0.25

التمرين 02 :

(I) g الدالة المعرفة على ، كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1 ـ دراسة إتجاه تغيرات الدالة g :

إتجاه التغير : الدالة g قابلة للإشتقاق على ومن أجل كل عدد حقيقي x، لدينا : $g'(x)=e^x-1$.....0.25

- ✓ $g'(x)=0$ تكافئ : $e^x-1=0$ ، أي : $x=0$
- ✓ $g'(x)>0$ تكافئ : $e^x-1>0$ ، أي : $x>0$
- ✓ $g'(x)<0$ تكافئ : $e^x-1<0$ ، أي : $x<0$ 0.5

وعليه : الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0\ ;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty\ ;0]$.....0.25

جدول تغيرات الدالة g : 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	↘	0	↗

2 ـ تعيين إشارة $g(x)$ و (e^x-x): من الدراسة السابقة نستنتج أن :

من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $g(x)\geq 0$ 0.5

إذن من أجل كل عدد حقيقي x، فإن: $e^x-x-1\geq 0$

وعليه : من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $e^x-x\geq 1$ 0.5

(II) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$.

2 ـ أ ـ التحقق أنه من أجل $x\geq 0$ ، فإن : $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-x\ e^{-x})$:

من أجل كل عدد حقيقي x، حيث : $x\geq 0$ ، لدينا :

$$f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)=x^2-2\ln\left[e^x(1-xe^{-x})\right]=x^2-2\left[\ln e^x+\ln(1+x\,e^{-x})\right]$$

0.5.....

$$=x^2-2\ln e^x-2\ln(1+x\,e^{-x})=x^2-2x-2\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2-2\ln x-2\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]=+\infty$ 0.25

ب ـ التحقق أنه من أجل $x<0$ ، فإن : $f(x)=x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x، حيث : $x<0$ ، لدينا :

$$f(x)=x^2-2\ln\left(e^x-x\right)=x^2-2\ln\left[-x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=x^2-2\left[\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]$$

0.5.....

$$=x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$$

حساب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(x+2\frac{\ln(-x)}{-x}\right)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=+\infty$$

3 ـ أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $f'(x)=\frac{2(x-1)}{e^x-x}\times g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على ومن أجل كل عدد حقيقي ، x ، لدينا :

$$f'(x)=2x-2\times\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{2x\left(e^x-x\right)-2e^x+2}{e^x-x}=\frac{2x\,e^x-2e^x-2x^2+2}{e^x-x}$$

0.5.....

$$=\frac{2e^x(x-1)-2\left(x^2-1\right)}{e^x-x}=\frac{2(x-1)\left(e^x-x-1\right)}{e^x-x}=\frac{2(x-1)}{e^x-x}\times g(x)$$

ب ـ إستنتاج إتجاه تغيرات الدالة f : من النتيجة السابقة ومن نتيجة السؤال (I)- 2 -) لدينا :

من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $g(x)\geq 0$ و $e^x-x\geq 1$.

ومنه نستنتج : ❖ $f'(x)=0$ ، تكافئ : $x=1$

❖ $f'(x)>0$ ، تكافئ : $x>1$ ❖ $f'(x)<0$ ، تكافئ : $x<1$ 0.5

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1\,;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty\,;1]$ 0.25

جدول تغيرات الدالة f : لدينا : $f(1)=1-2\ln(e-1)\approx -0.073$ 0.25

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	0	$-\ 0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1)$	↗ $+\infty$

6 ـ أ ـ معادلة المماس (Δ) : $(\Delta): y=0$ 0.25

ب : ☜ $f(1)\approx -0.08265$ ☜ $f(2)\approx 0.63122$ ☜ $f\left(\frac{3}{2}\right)\approx 0.06502$ 0.75

جـ - لنبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ O فاصلتها α، حيث : $1<\alpha<\frac{3}{2}$:

لدينا من جهة $f(0)=0$ ومن جهة أخرى :

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1\ ;\ +\infty[$ ، فهي إذن مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$

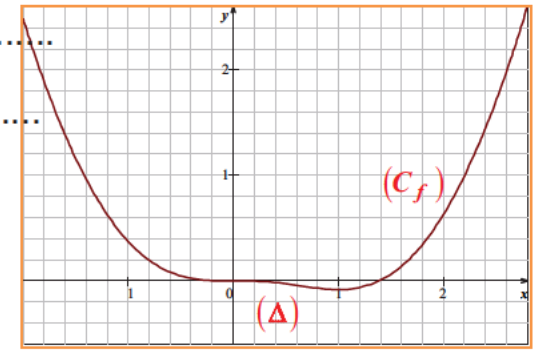
ولدينا : $f(1)\times f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ ، أي : $f(1)<0<f\left(\frac{3}{2}\right)$.

تطبيقا لمبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$، تقبل حلا وحيدا α، حيث : $1<\alpha<\frac{3}{2}$.

وهذا يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المبدأ O ونقطة فاصلتها α

حيث : $1<\alpha<\frac{3}{2}$ 0.75

د - رسم (C_f) و (Δ) : 1



ملاحظة : المبدأ $O(0;0)$ نقطة إنعطاف للمنحني (C_f).

التمرين 03 :

1- الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$:

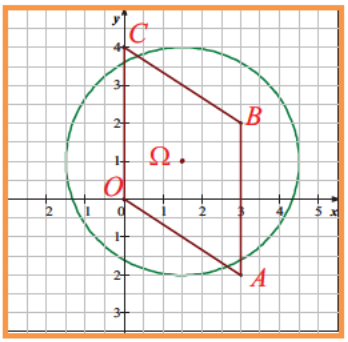
لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(1)(13)=36-52=-16=16i^2=(4i)^2$ 0.5

وعليه للمعادلة $z^2-6z+13=0$ حلين مركبين مترافقين هما : $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ ، $z_2=3-2i$ 1

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A و B و C النقاط التي لواحقها : $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ ، $c=4i$ ، على الترتيب .

2 - تعليم النقط A و B و C في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$: 0.5



3 - لنبين أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع :

لدينا : $OA=|a-0|=|3-2i|=\sqrt{13}$

$AB=|b-a|=|(3+2i)-(3-2i)|=|4i|=4$

$BC=|c-b|=|(4i)-(3+2i)|=|-3+2i|=\sqrt{13}$

$OC=|c-0|=|4i|=4$ 0.5

بما أن $OA=BC$ و $AB=OC$ ، فإن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع 0.25

4 - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$:

نسمي z_Ω لاحقة النقطة Ω ،يكون عندئذ :

$z_\Omega=\frac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}=\frac{0+3-2i+3+2i+4i}{4}=\frac{6+4i}{4}=\frac{3}{2}+i$ 0.5

5 - تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\vec{MO}+\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=12$:

... 5 / 4 ...

نعلم أن : $M\vec{O}+M\vec{A}+M\vec{B}+M\vec{C}=4M\Omega$ (أنظر خواص المرجح)

وعليه : $\left\|M\vec{O}+M\vec{A}+M\vec{B}+M\vec{C}\right\|=12$ تكافئ : $\|4M\Omega\|=12$ أي : $\Omega M=3$ 0.25

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|M\vec{O}+M\vec{A}+M\vec{B}+M\vec{C}\right\|=12$ هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 3 . (أنظر الشكل السابق).....0.5

6 ـ لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . نرمز بـ β إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ لنبين أن لاحقة النقطة N هي : $z_N=\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$:

بما أن M من المستقيم (AB) و β الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ، فإن لاحقتها هي : $z_M=3+i\beta$ 0.25

ـ الكتابة المركبة الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ تكتب على الشكل : $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+b$ ، حيث b عدد مركب .

لدينا : $r(\Omega)=\Omega$ وعليه : $z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}z_\Omega+b=iz_\Omega+b$ ، أي : $\frac{3}{2}+i=i\left(\frac{3}{2}+i\right)+b$

ومنه : $b=\frac{3}{2}+i-i\left(\frac{3}{2}+i\right)=\frac{3}{2}+i-\frac{3}{2}i+1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$.....0.25

الكتابة المركبة الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ تكتب عندئذ على الشكل : $z'=iz+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$.....0.5

N صورة النقطة M بالدوران r إذن : $z_N=iz_M+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ أي :

$z_N=i\left(3+i\beta\right)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i=3i-\beta+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.....0.5

ب ـ إختيار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) :

النقطة N إلى المستقيم (BC) تعني أن النقط N ، B و C في إستقامية .

ونعلم أن النقط N ، B و C في إستقامية تعني أن $\frac{z_N-z_C}{z_B-z_C}$ عدد حقيقي 0.25

لدينا :

$$\frac{\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i-4i}{3+2i-4i}=\frac{\frac{5}{2}-\beta-\frac{3}{2}i}{3-2i}=\frac{1}{2}\times\frac{5-2\beta-3i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$

0.75.....

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(5-2\beta)+6+i\left(2(5-2\beta)-9\right)}{13}=\frac{1}{2}\times\frac{21-6\beta+i(1-4\beta)}{13}$$

إذن : $\frac{z_N-z_C}{z_B-z_C}$ عدد حقيقي تعني أن $1-4\beta=0$ ، أي : $\beta=\frac{1}{4}$ 0.25

تكون عندئذ لاحقة النقطة N هي : $z_N=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}i=\frac{9}{4}+\frac{5}{2}i$ 0.25