ثانوية أحمد مربوح
سيدي الجيـلالي

السنة الدراسية 2007–2008
المستوى: 3 علوم تجريبية
المدة : 3 ساعات

امتحان الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (5 نقط)

نعتبر الدّالة العددية f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbf{R}$. نرمز إلى مشتقة الدالة f بـ : f' . الجدول في الأسفل يمثّل تغيرات الدالة f على $\mathbf{R}$. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$:

$f(x)$	$+\infty$

عين الإجابات الصحيحة في كل حالة من الحالات التالية: (برّر الإجابتين 4 و 5)

1– أ- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ب- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ جـ- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

2– المنحنى (C) يقبل كمستقيم مقارب , المستقيم الذي معادلته :

أ- $x=0$ ب- $x=2$ جـ- $y=0$

3– في المجموعة $\mathbf{R}$ المعادلة $f(x)=0$ تقبل :

أ- حل واحد ب- حلين مختلفين جـ- ثلاث حلول مختلفة

4–نعتبر في المجموعة $\mathbf{R}$ المتراجحة $f(x)\geq -1$ و لتكن S مجموعة حلولها

أ- $S=\square$ ب- $S=\left]2,+\infty\right[$ جـ- $S=\left]-\infty,-2\right]$

5 – لتكن الدالة g بحيث : $g(x)=e^{f(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي x . على المجال $\left]-\infty,2\right]$ الدالة g :

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما جـ- لها نفس اتجاه تغير الدالة f

التمرين الثاني: (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1– حل في $\square$ المعادلة : $z^2-(2+i)z+3+i=0$ نرمز للحلين بـ : z_0 , z_1 حيث : $|z_0|>|z_1|$

2–لتكن النقط A , B , C من المستوي صور الأعداد : z_0 , z_1 , 1 على الترتيب . أوجد إحداثيتي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A , B , C

3 – T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

أ– بين أن : $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$

ب– استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة . أكتب عبارته المركبة

ج– لتكن النقط A' , B' , C' من المستوي صور النقط A , B , C على الترتيب بالتحويل T .

بين أنّ النقط A', B', C' في استقامية .

التمرين الثالث (10 نقط) : المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول تساوي: 1سم

الجزء الأول:

I– نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1,+\infty[$ بحيث : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2– أدرس تغيرات الدالة g على $[1,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

3– استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$: $0 < g(x) < 1$ .....(1) (لاحظ جدول التغيرات)

4 – أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 1. أرسم (T) و المنحنى (C_g)

II– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]1,+\infty[$ بحيث : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{x>1}1} f(x)$. فسر النتائج بيانيا

2– لاحظ أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$: $f(x)=g(x)+\ln(g(x))$

أ– بين أنّ الدالة f تقبل اشتقاق على $]1,+\infty[$ ثمّ بين بالحساب أنّ : $f'(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$

ب– أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]1,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3– بين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد x_0 حيث $3.5<x_0<3.7$. استنتج قيمة تقريبية للعدد x_0

الجزء الثاني:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$ نضع : $h(x)=f(x)-g(x)$

1– باستعمال الحصر (1) في الجزء الأول عين إشارة $h(x)$ على المجال $]1,+\infty[$ ثمّ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_g)

2– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ كيف تفسر بيانيا هذه النتيجة ؟

3– أرسم (C_f) في نفس المعلم

4– لتكن A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل و لتكن B نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل

لتكن C نقطة من المنحنى (C_g) فاصلتها x_C حيث $0<x_C\le x_0$

أ– بين أنّ مساحة المثلث ABC تساوي : $\dfrac{1}{2}(x_0-1)g(x_C)$

ب– عيّن x_C حتّى تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن .

مع تحيات الأستاذ :
مهاجـر لطفي

تذكير : مساحة مثلث تساوي نصف جداء طول القاعدة و الارتفاع

التصحيح النموذجي لإمتحان الفصل الثاني لمادة الرياضيات
المستوى : 3 علوم تجريبية

التمرين	الإجابة النموذجية — 3 علوم تجريبية	التنقيط
التمرين الأول (05)	1- الإجابة الصحيحة هي : جـ : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$	0,75
	2- الإجابة الصحيحة هي : جـ	0,5
	3- الإجابة الصحيحة هي : ب	0,75
	4- الإجابة الصحيحة هي : أ . التبرير : لأن 1- قيمة حدية صغرى على IR للدالة f	2×0,75
	5- الإجابة الصحيحة هي : جـ لأن : $g(x) = f(x)e^{f(x)}$ أي أن إشارة $g(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$	2×0,75
التمرين الثاني (05)	1- حل المعادلة : المميز : $\Delta = -9$	0,25
	الحلول : $z_0 = 1+2i$ ، $z_1 = 1-i$	0,75
	2- إحداثيات مركز المسافات المتساوية : G لتكن z_G لاحقة G إذن : $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$ $= 1 + \frac{1}{3} i$ إذن $G(1, \frac{1}{3})$.	01
	3- أ * باستعمال علاقة شال في الأشعة (إدخال النقطة G) يمكن إثبات أن : $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.	0,5
	ب * طبيعة التحويل T : T هو تحاكي مركزه G و نسبته 2- .	0,5
	عبارته المركبة : $z' = -2z + 3 + i$	01
	جـ * إثبات أن النقط A' ، B' ، C' في إستقامية : هناك عدة طرق لإثبات ذلك . (نقبل أي طريقة صحيحة). يكفي إثبات أن $\overrightarrow{A'B'} // \overrightarrow{A'C'}$ وهذا معناه إثبات وجود عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$ معناه : $z_{B'} - z_{A'} = k(z_{C'} - z_{A'})$ أي أن : $\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}} = k$ ولكن : $z_{B'} - z_{A'} = -2(z_B - z_A)$ $z_{C'} - z_{A'} = -2(z_C - z_A)$ وبالتالي يكفي إثبات أن العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ هو عدد حقيقي وهذا صحيح بالحساب	01,5

التنقيط	الإجابة النموذجية	التمرين
	الجزء الأول : (6,25 ن) .	التمرين الثالث (10 ن) .
0,25	I * 1 : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$	
0,75	2* دراسة إتجاه التغير : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. $g'(x) > 0$ وبالتالي g متزايدة تماما على $[1,+\infty[$	
	جدول التغيرات :	

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0 ↗	1

0,5	3* الإستنتاج : الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,+\infty[$ وبالتالي على $]1,+\infty[$ ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ و $g(1) = 0$ إذن لما كان $x > 1$ فإن : $0 < g(x) < 1$. (وهذا واضح على جدول التغيرات).	
0,25	4* معادلة المماس (T) هي : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	
0,25	5* رسم المنحنى : أنظر الشكل أسفله	
2×0,5	II * 1 : $\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = -\infty$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$	
0,5	التفسير البياني : المنحنى (C) يقبل المستقيمان ذوا المعادلتين : $y=1$ و $x=1$ كمستقيمين مقاربين .	
0,5	2* الدالة f قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق هما : $x \mapsto g(x)$ و $x \mapsto \ln(g(x))$ على $]1,+\infty[$ والدالة الأخيرة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق هما g و $x \mapsto \ln x$ على المجال $]1,+\infty[$.	
0,5	* بالحساب ينتج : $f'(x) = g'(x) + \frac{g'(x)}{g(x)}$ $= \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$.	
0,5	3* إتجاه التغير : $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]1,+\infty[$ وبالتالي فالدالة f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$	

التمرين	الإجابة النموذجية	التنقيط
التمرين الثالث	جدول التغيرات :	0,25

x	1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0 ↗	1

*4 إثبات وجود الحل x_0 : الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]3,5;3,7[$

وبما أن : $f(3,5)=-0,03$ و $f(3,7)\simeq 0,02$ فإن :

$$f(3,5)<0<f(3,7)$$

إذن حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد x_0 وحيد 0,75

بحيث $3,5<x_0<3,7$ و $f(x_0)=0$.

القيمة التقريبية لـ x_0 : $x_0\simeq\frac{3,5+3,7}{2}\simeq 3,6$ 0,25

الجزء الثاني :

*1 إشارة $h(x)$: لدينا : $h(x)=\ln(g(x))$ وبما أن $0<g(x)<1$

حسب الحصر (1) في الجزء الأول فإن $h(x)<0$ من أجل كل عدد 0,5

حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$.

إذن المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى (C_g) 0,25

*2 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ وتفسر هذه النتيجة بأن المنحنى (C_f) يقارب 2 × 0,5

المنحنى (C_g) بجوار $(+\infty)$.

*3 رسم المنحنى : أنظر الشكل أسفله 0,75

*4 أ- مساحة المثلث ABC : تساوي نصف جداء طولي القاعدة

والارتفاع . طول القاعدة [AB] يساوي x_0-1 وطول 0,5

الارتفاع يساوي $g(x_c)$ وبالتالي : $S=\frac{1}{2}(x_0-1)\,g(x_c)$.

ب- تعيين x_c حتى تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن :

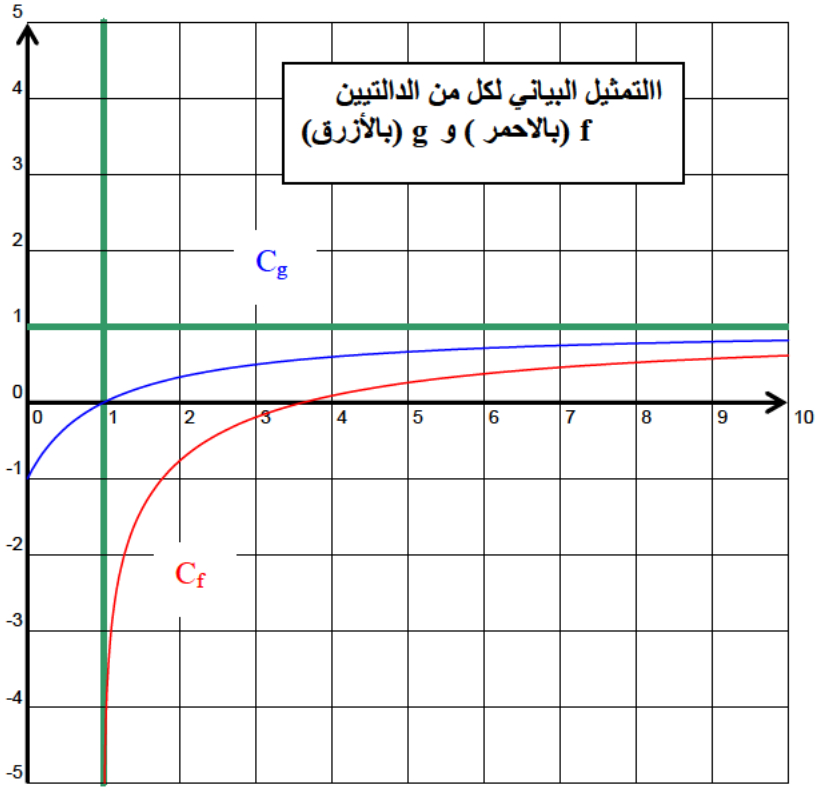
الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,x_0]$ إذن أكبر قيمة 0,75

للمساحة هي عندما يكون $x_c=x_0$

* إنتهى *

تحت إشراف الأستاذ

مهاجر لسطفي


االتمثيل البياني لكل من الدالتيين
f (بالاحمر) و g (بالأزرق)
C_g
C_f
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10