الإختبار الثاني في الرياضيات

السنة الثالثة شعبة العلوم التجريبية **المدة :3 ساعات**

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) نعتبر المستوي (P) معادلته:

$2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط A (3 , 2 , 6) ; B (1 , 2 , 4) ; C (4 , – 2 , 5)

1) بين أن الجملة { (C ، 1) ، (B ، 1) ، (A ، 1) ، (O, 3) } تقبل مرجحا G.

2) عين إحداثيتي I مركز ثقل المثلث ABC.

3) أثبت أن G منتصف [OI].

التمرين الثاني:

α و β عددان مركبان حيث :

$$\alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\beta = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) - i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

1) أحسب β^2 ثم أكتب على الشكل المثلثي.

2) استنتج طويلة و عمدة β.

3) استنتج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$.

4) أوجد طويلة و عمدة α.

5) أكتب علة الشكل الأسي العدد $(\alpha\beta)^{2008}$

التمرين الثالث:

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) نعتبر المستوي (P) المار بالنقطة A(1 , –2, 1) و شعاعه الناظمي $\vec{n}$ (– 2 , 1 , 5) و المستوي (P') الذي معادلته: $x + 2y - 7 = 0$

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوي (P).
2. أثبت أن المستوي (P) و (P') متعامدان.
3. بين أن تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم (d) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي.
4. أحسب المسافة بين النقطة B(3 , –2, – 1) و كل من المستويين (P) و (P') .

التمرين الرابع:

I) f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)

1. أوجد مجموعة تعريف الدالة f .
2. عين الأعداد a , b , c حيث : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ من أجل $x \in D_f$.
3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. بين أن المستقيم $(d) : y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
5. أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .
6. أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 2 – .
7. أنشئ المنحنى (C_f).
8. ناقش بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعدلة $f(x) = m + 1$.

II) لتكن الدالة g معرفة على المجال $]-1 , +\infty[$ حيث : $g(x) = -f(x)$

1. شكل جدول تغيرات الدال g .
2. استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_g).
3. أنشئ (C_g) في نفس المعلم.

تمنياتنا لكم بالنجاح

مع تحيات أساتذة المادة:

لعرج لعراجي - جيلا لي مالك – بوعلام بن الزاير

التمرين الأول (3 نقط)

$(P) : 2x + y - 2z + 4 = 0$

$A(4,-2,5)$; $B(1,2,4)$;$C(3,2,6)$

1) نبين أن G مرجح الجملة: $\{(O,3), (A,1), (B,1), (C,1)\}$
لدينا $1 + 1 + 1 + 3 \neq 0$ و منه G موجودة. 0.5
إحداثيتي G.

$$X_G = \frac{3.0 + 1.3 + 1.1 + 1.4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$Y_G = \frac{3x0 + 1x2 + 1x2 + 1x-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad G(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{2})$$

$$Z_G = \frac{3x0 + 1x6 + 1x4 + 1x5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \qquad 1$$

2) إحداثيتي I مركز ثقل المثلث ABC.

$$I(\frac{3+1+4}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{6+4+5}{3}) \quad I(\frac{8}{3},\frac{2}{3},5) \qquad 1$$

3) نبين أن G منتصف **[OI]**.لتكن G' منتصف **[OI]**.

$$X_{G'} = \frac{0 + \frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}, \; Y_{G'} = \frac{0 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}; \; Z_{G'} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$$

و منه $G = G'$ 0.5

التمرين الثاني 4 نقط

$\alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; $\beta = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) - i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

حساب β^2 ثم كتابته على الشكل المثلثي:

$\beta^2 = -8\sqrt{3} - 8i$ 1

$|\beta^2| = \sqrt{643 + 64} = \sqrt{464} = 2 . 8 = 16$ 0.25

$\cos\theta = -\frac{8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{8}{16} = \frac{-1}{2}$

$\theta = 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 0.25

$\beta^2 = 16\left(\cos 7\frac{\pi}{6} + i\sin 7\frac{\pi}{6}\right)$, $\beta^2 = [16, 7\frac{\pi}{6}]$

طويلة و عمدة β. ليكن $\beta = [r, \theta]$ و منه $\beta^2 = [r^2, 2\theta]$

لدينا $[16, 7\frac{\pi}{6}] = [r^2, 2\theta]$ و منه

$r^2 = 16$ و $r = 4$ ، $2\theta = 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $\theta = 7\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{2}$

لما $k = 0$ فإن $\theta = 7\frac{\pi}{12}$ و منه $\beta = [4; 7\frac{\pi}{12}]$ مرفوض

لما $k = 1$ فإن $\theta = 19\frac{\pi}{12}$ و منه $\beta = [4; 19\frac{\pi}{12}]$ 0.5

3) استنتاج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$.

لدينا $\beta = \beta$ و منه :

$$4\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) - i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

و منه $\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{19\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

0.50

4) طويلة و عمدة α :

$\alpha = 2\left(\cos(\pi + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{2})\right)$ 0.25

$= 2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin(\frac{13\pi}{12})\right)$ 0.25

$|\alpha| = 2$, $\text{Arg}(\alpha) = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ 0.25+ 0.25

$$\alpha\beta = 8\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin(\frac{13\pi}{12})\right)\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$$= 8\left(\cos(\frac{13\pi}{12} + \frac{19\pi}{12}) + i\sin(\frac{13\pi}{12} + \frac{19\pi}{12})\right)$$

$$= 8\left(\cos\frac{32\pi}{12} + i\sin\frac{32\pi}{12}\right) = 8\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$(\alpha\beta)^{2008} = 8^{2008}\left(\cos\frac{16064\pi}{3} + i\sin\frac{16064\pi}{3}\right)$$

$$= 8^{2008}\left(\cos(5354\pi + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(5354\pi + \frac{2\pi}{3})\right)$$

$$= 8^{2008}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right) = 8^{2008}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$ 0.5

التمرين الثالث 4 نقط

$(P') : x + 2y - 7 = 0$

1) معادلة (P) الذي يشمل $A(1,-2,1)$ و ناظمه $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$ و منه $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 0.5

و منه $(x-1)(-2) + (y+2)(1) + (z-1)(5) = 0$

و منه $-2x + y + 5z - 1 = 0$ و هي معادلة (P) 0.5

2) الناظمي للمستوي (P) هو $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ و للمستوي (P') $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 0.25

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ هو: 00.75

$1.(-2) + 2.1 + 0(5) = -2 + 2 + 0 = 0$ و منه $(P) \perp (P')$

3) (P) و (P') ليس متطابقان

لدينا $\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \\ y = t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = \frac{2(-2t+7) - t + 1}{5} \end{cases}$

و منه $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases}$ 0.25 + 0.5 + 0.25

التمرين الرابع 9 نقط

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$$

1) مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ 0.5

2) تعيين الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

بالمطابقة نجد : $f(x) = \frac{ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (b+c)}{(x+1)^2}$

و منه $a = 1$; $2a = 2$, $a + b = 0$; $b + c = 0$

$c = 1$; $b = 0 - 1$; $a = 1$ 1

3) دراست تغيرات الدالة f:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 0.25+ 0.25

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ **0.25+ 0.25**

المشتقة : من أجل كل عدد $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x^3+3x^2+4x^2+4x - 2x3 - 4x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} = \frac{x(x+1)(x^2+3x+4)}{(x+1)^4}$$ **1**

إشارة المشتقة من نفس إشارة $x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4) نبين أن $y = x$: (d) مقارب مائل. **0.5**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

و $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

5) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

$$f(x) - x = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}$$ **0.25**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
	C_f فوق (d)		C_f فوق (d)			C_f أسفل (d)	

0.75

6) معادلة المماس عند -2 .

$y = 4(x+2) = 4x + 8$ **0.5**

7) انشاء المنحنى البياني (C_f) **0.5**

المناقشة البانية:

لما $m + 1 < 0$ أي $m<-1$ المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m + 1 = 0$ أي $m= -1$ المعادلة تقبل حلين **0.5**

لما $m + 1 > 0$ أي $m > -1$ المعادلة تقبل 3 حلول

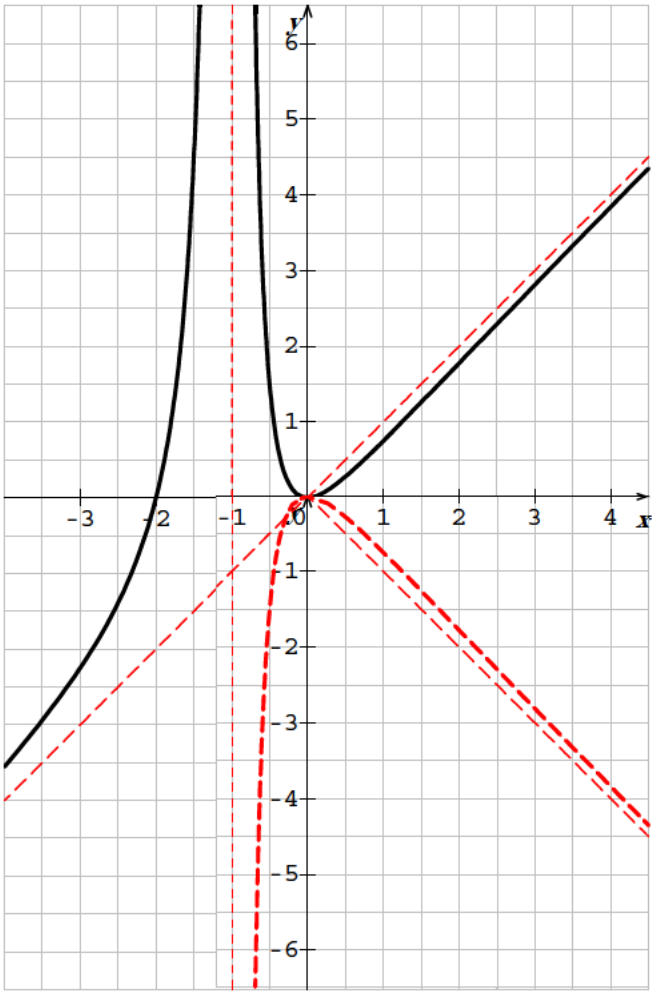
II) لدينا $g(x) = -f(x)$

1) جدول تغيرات g. **0.5**

x	-1		0	
$g'(x)$	$+$		0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$

2) المستقيمات المقاربة :

لدينا $x = -1$ و $y = -x$ **0.5**



الأستاذ لعرج لعراجي