ثانوية الشهيد قطاش حمود بالعزيزية — يوم : 14 / 03 / 2010

الأقسام : الثالثة علوم تجريبية

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (05 نقاط)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه1.

لتكن I مركز ثقل المربع $ADHE$ و J مركز ثقل المربع $ABCD$ ، K منتصف $[IJ]$

نعتبر المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1 – عين إحداثيات النقاط I ، J ، K في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2 – بين أن النقط A ، K و G ليست في إستقامية .

3 - أ - بين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) .

ب - أعط معادلة ديكارتية للمستوي (AKG) .

جـ - تحقق أن النقطة D تنتمي للمستوي (AKG) .

التمرين 02 : (08 نقاط)

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ، كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1 - أدرس إتجاه تغيرات الدالة g . (لا يطلب حساب النهايات)

2 - إستنتج إشارة $g(x)$ و $(e^{x}-x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^{2}-2ln(e^{x}-x)$.

1 - أ - تحقق أنه من أجل $x\geq 0$ ، فإن : $f(x)=x^{2}-2x-2ln(1-xe^{-x})$ ، وأحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - تحقق أنه من أجل $x<0$ ، فإن : $f(x)=x^{2}-2ln(-x)-2ln\left(1-\frac{e^{x}}{x}\right)$ ، وأحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2 - أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن : $f'(x)=\frac{2(x-1)}{e^{x}-x}\times g(x)$.

ب - إستنتج إتجاه تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3 - في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نسمي (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f

و (Δ) المماس للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

أ - أكتب معادلة المماس (Δ) .

ب - أحسب $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

جـ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ O فاصلتها a ، حيث : $1<a<\frac{3}{2}$.

د - أرسم (C_f) و (Δ).

التمرين 03 : (07 نقاط)

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

نعتبر النقاط A , B و C التي لواحقها : $a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ ، $c = 4i$ ، على الترتيب .

1 ـ علم النقط A , B و C في المعلم $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2 ـ بين أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

3 ـ عين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$.

4 ـ عين ثم أرسم مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$.

5 ـ لتكن M نقطة من المستقيم (AB).

نرمز بـ b إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

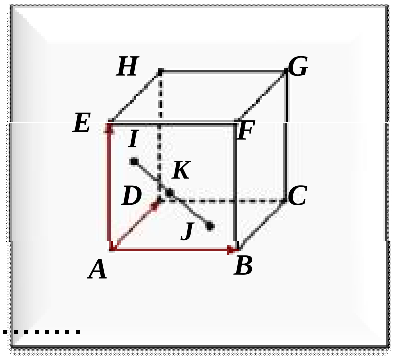
أ ـ بين أن لاحقة النقطة N هي : $z_N = \frac{5}{2} - b + \frac{5}{2}i$.

ب ـ كيف يمكن إختيار b حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) ؟

إنتهـــــــــــى

بالتوفيق

تذكير : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$



التصحيح النموذجي مع سلم التنقيط لإختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ ضلعه1.

لتكن I مركز ثقل المربع $ADHE$ و J مركز ثقل المربع $ABCD$

K منتصف $[IJ]$.

نعتبر المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1 – تعيين إحداثيات النقاط I ، J ، K في المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$: 0.5.........

لدينا : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ وعليه : $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ .... 0.25 ....

$\overrightarrow{Aj}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ وعليه : $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ 0.25

K منتصف قطعة المستقيم $[IJ]$ وعليه : $K\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ 0.25

2 – لنبين أن النقط A ، K و G ليست في إستقامية :

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ وعليه : $G(1;1;1)$.....................................0.25

يكون عندئذ : $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ 0.25

الشعاعان $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AK}$ غير مرتبطين خطيا وعليه النقط A ، K و G ليست في إستقامية.......................... 0.25

3 ـ أ ـ لنبين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) :

لدينا : $AI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $AJ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.25

إذن النقطة A تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

ولدينا أيضا : $GI=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $GJ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 0.25

إذن النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

ولدينا أيضا : K منتصف قطعة المستقيم $[IJ]$

إذن النقطة K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ 0.25

الخلاصة : المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ هو المستوي (AKG) 0.25

ب ـ معادلة ديكارتية للمستوي (AKG) :

بما أن المستوي (AKG) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ فإن الشعاع $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ شعاع

ناظمي للمستوي (AKG) 0.25

معادلة المستوي (AKG) تكتب عندئذ على الشكل : $\frac{1}{2}x+0y-\frac{1}{2}z+d=0$ ، حيث d عدد حقيقي............ 0.25

بما أن A تنتمي إلى المستوي (AKG) فإن : $\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}(0)+d=0$ ، أي : $d=0$ 0.25

الخلاصة : معادلة المستوي (AKG) هي : $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=0$ ، أي : $x-z=0$ 0.25

جـ - التحقق أن النقطة D تنتمي للمستوي (AKG) :

لدينا من جهة : $\overrightarrow{AD}=0\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AE}$ وعليه : $D(0;1;0)$ 0.25

ومن جهة أخرى : $0=0-0=0$ ، إذن D تنتمي للمستوي (AKG) 0.25

<u>التمرين 02</u> :

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ، كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1 - دراسة إتجاه تغيرات الدالة g :

إتجاه التغير : الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x، لدينا : $g'(x)=e^{x}-1$ 0.25

- $g'(x)=0$ تكافئ : $e^{x}-1=0$ ، أي : $x=0$
- $g'(x)>0$ تكافئ : $e^{x}-1>0$ ، أي : $x>0$
- $g'(x)<0$ تكافئ : $e^{x}-1<0$ ، أي : $x<0$ 0.5

وعليه : الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ 0.25

جدول تغيرات الدالة g : 0.25

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	- $\quad 0 \quad$ +
$g(x)$	$\searrow$ $\quad 0 \quad$ $\nearrow$

2 - تعيين إشارة $g(x)$ و $(e^{x}-x)$: من الدراسة السابقة نستنتج أن :

من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $g(x)\geq 0$ 0.5

إذن من أجل كل عدد حقيقي x، فإن: $e^{x}-x-1\geq 0$

وعليه : من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $e^{x}-x\geq 1$ 0.5

(II) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x^{2}-2\ln(e^{x}-x)$.

2 - أ - التحقق أنه من أجل $x\geq 0$ ، فإن : $f(x)=x^{2}-2x-2\ln(1-x\ e^{-x})$:

من أجل كل عدد حقيقي x، حيث : $x\geq 0$ ، لدينا :

$$f(x)=x^{2}-2\ln(e^{x}-x)=x^{2}-2\ln\left[e^{x}(1-xe^{-x})\right]=x^{2}-2\left[\ln e^{x}+\ln(1+x\,e^{-x})\right]$$

0.5........

$$=x^{2}-2\ln e^{x}-2\ln(1+x\,e^{-x})=x^{2}-2x-2\ln\left(1+\frac{x}{e^{x}}\right)$$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-2\ln x-2\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]=+\infty$$ 0.25

ب ـ التحقق أنه من أجل $x<0$ ، فإن : $f(x)=x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x، حيث : $x<0$ ، لدينا :

$$f(x)=x^2-2\ln\left(e^x-x\right)=x^2-2\ln\left[-x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=x^2-2\left[\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]$$

0.5............

$$=x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2-2\ln(-x)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(x+2\frac{\ln(-x)}{-x}\right)-2\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=+\infty$$

3 ـ أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $f'(x)=\frac{2(x-1)}{e^x-x}\times g(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي ، x ، لدينا :

$$f'(x)=2x-2\times\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{2x\left(e^x-x\right)-2e^x+2}{e^x-x}=\frac{2xe^x-2e^x-2x^2+2}{e^x-x}$$

0.5.........................

$$=\frac{2e^x(x-1)-2\left(x^2-1\right)}{e^x-x}=\frac{2(x-1)\left(e^x-x-1\right)}{e^x-x}=\frac{2(x-1)}{e^x-x}\times g(x)$$

ب ـ إستنتاج إتجاه تغيرات الدالة f : من النتيجة السابقة ومن نتيجة السؤال ((I) - 2 -) لدينا :

من أجل كل عدد حقيقي x، فإن : $g(x)\geq 0$ و $e^x-x\geq 1$.

ومنه نستنتج : **v** $f'(x)=0$ ، تكافئ : $x=1$

v $f'(x)>0$ ، تكافئ : $x>1$ **v** $f'(x)<0$ ، تكافئ : $x<1$ 0.5

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ 0.25

جدول تغيرات الدالة f : لدينا : $f(1)=1-2\ln(e-1)\approx-0.073$ 0.25

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0 -	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$f(1)$ ↗	$+\infty$

6 ـ أ ـ معادلة المماس (Δ) : $(\Delta): y=0$ 0.25

ـب : **E** $f(1)\approx-0.08265$ **E** $f(2)\approx0.63122$ **E** $f\left(\frac{3}{2}\right)\approx0.06502$ 0.75

جـ - لنبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ O فاصلتها a، حيث: $1<a<\frac{3}{2}$:

لدينا من جهة $f(0)=0$ ومن جهة أخرى :

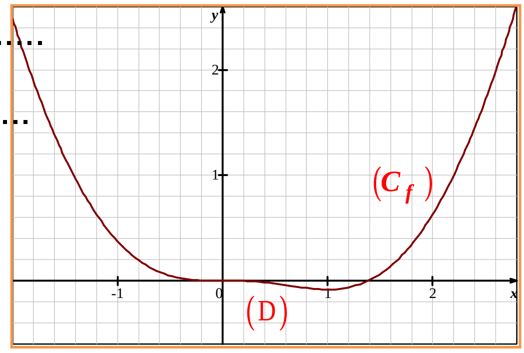
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$ ، فهي إذن مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$

ولدينا : $f(1)\times f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ ، أي : $f(1)<0<f\left(\frac{3}{2}\right)$.

تطبيقا لمبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ ، تقبل حلا وحيدا a، حيث: $1<a<\frac{3}{2}$.

وهذا يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المبدأ O ونقطة فاصلتها a

حيث: $1<a<\frac{3}{2}$ .... 0.75..........



د - رسم (C_f) و (Δ) : .... 1...............

ملاحظة : المبدأ $O(0;0)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

التمرين 03 :

1- الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$:

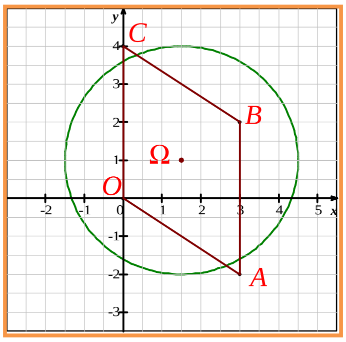
لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(1)(13)=36-52=-16=16i^2=(4i)^2$ 0.5

وعليه للمعادلة $z^2-6z+13=0$ حلين مركبين مترافقين هما : $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ ، $z_2=3-2i$ 1

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

النقاط A, B و C التي لواحقها : $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ ، $c=4i$ ، على الترتيب .

2 - تعليم النقط A, B و C في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$: .... 0.5.............



3 - لنبين أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع :

لدينا : $OA=|a-0|=|3-2i|=\sqrt{13}$

$AB=|b-a|=|(3+2i)-(3-2i)|=|4i|=4$

$BC=|c-b|=|(4i)-(3+2i)|=|-3+2i|=\sqrt{13}$

$OC=|c-0|=|4i|=4$ 0.5

بما أن $OA=BC$ و $AB=OC$ ، فإن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع 0.25

4 - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$:

نسمي z_Ω لاحقة النقطة Ω، يكون عندئذ :

$$z_\Omega=\frac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}=\frac{0+3-2i+3+2i+4i}{4}=\frac{6+4i}{4}=\frac{3}{2}+i$$ 0.5

5 - تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$:

نعلم أن : $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{M\Omega}$ (أنظر خواص المرجح)

وعليه : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ : $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ أي : $\Omega M=3$ 0.25

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف

قطرها 3 . (أنظر الشكل السابق)... 0.5

6 ـ لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . نرمز بـ b إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ولتكن N صورة النقطة M

بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ لنبين أن لاحقة النقطة N هي : $z_N=\frac{5}{2}-b+\frac{5}{2}i$:

بما أن M من المستقيم (AB) و b الجزء التخيلي للاحقة النقطة M ، فإن لاحقتها هي : $z_M=3+ib$ 0.25

ـ الكتابة المركبة الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ تكتب على الشكل : $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+b$ ، حيث b عدد مركب .

لدينا : $r(\Omega)=\Omega$ وعليه : $z_\Omega=e^{i\frac{\pi}{2}}z_\Omega+b=iz_\Omega+b$ ، أي : $\frac{3}{2}+i=i\left(\frac{3}{2}+i\right)+b$

ومنه : $b=\frac{3}{2}+i-i\left(\frac{3}{2}+i\right)=\frac{3}{2}+i-\frac{3}{2}i+1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ 0.25

الكتابة المركبة الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ تكتب عندئذ على الشكل : $z'=iz+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ 0.5

N صورة النقطة M بالدوران r إذن : $z_N=iz_M+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ أي :

$z_N=i(3+ib)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i=3i-b+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{5}{2}-b+\frac{5}{2}i$ 0.5

ب ـ إختيار b حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) :

النقطة N إلى المستقيم (BC) تعني أن النقط N ، B و C في إستقامية .

ونعلم أن النقط N ، B و C في إستقامية تعني أن $\frac{z_N-z_C}{z_B-z_C}$ عدد حقيقي 0.25

لدينا :

$$\frac{\frac{5}{2}-b+\frac{5}{2}i-4i}{3+2i-4i}=\frac{\frac{5}{2}-b-\frac{3}{2}i}{3-2i}=\frac{1}{2}\times\frac{5-2b-3i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$ 0.75

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3(5-2b)+6+i(2(5-2b)-9)}{13}=\frac{1}{2}\times\frac{21-6b+i(1-4b)}{13}$$

إذن : $\frac{z_N-z_C}{z_B-z_C}$ عدد حقيقي تعني أن $1-4b=0$ ، أي : $b=\frac{1}{4}$ 0.25

تكون عندئذ لاحقة النقطة N هي : $z_N=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}i=\frac{9}{4}+\frac{5}{2}i$ 0.25