ثانوية السعيد عبد الحي

الإختبار الثاني في مادة : الرياضيات

السنة الدراسية : 2009/2008

المستوى: السنة ثالثة هندسة كهربائية — المدة : ساعتان

التمرين الأول :

1) عين الجذرين التربيعيين للعدد : $w=-32+24i$.

2) نعتبر في C كثير الحدود $P(Z)$ حيث :

$$P(Z)=Z^3+(5i-6)Z^2+(9-24i)Z+13i+18 .$$

أ) بين أن $-i$ هو جذر لـ$P(Z)$.

ب) عين العداد المركبة a , b , c : بحيث $P(Z)=(Z+i)(aZ^2+bZ+c)$.

ج) حل في C المعادلة : $P(Z)=0$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلي معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط A , B و C لواحقها $(-i)$, $(2-5i)$, $(4+i)$ على الترتيب .

أ) أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ على الشكلين الجبري والمثلثي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة الذي يحقق : $T(C)=B$ و $T(A)=A$.

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(0,2,3)$, $B(-1,0,4)$, $C(2,-3,0)$ نقط من الفضاء .

1) برهن أن النقط A , B و C تعين مستوي يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2) نعتبر المستويين (P_2) و (P_2) المعرفين بالمعادلتين :

$$(P_1): x+y-z=0$$

$$(P_2): x-y-2z-1=0$$

أ) بين أن المستويين (P_2) و (P_2) متقاطعين .

ب) نفرض أن (Δ) مستقيم تقاطع المستويين أوجد معادلته .

ج) أوجد شعاع توجيه (Δ) .

التمرين الثالث :

نعتبر الأعداد الطبيعية : $a=3n+2$, $b=2n-1$, $c=n+2$ _حيث_ n عدد طبيعي غير معدوم .

1) بين أن b و a أوليان فيما بينهما .

2) تحقق أن $a=3c-4$ ثم استنتج القيم الممكنة لـ$PGCD(a,c)$.

3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\dfrac{a}{c}$ عنصرا من N .

4) عين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق :

$$\begin{cases} PGCD(a,c)=4 \\ PPCM(a,c)=8 \end{cases}$$

بالتوفيق

ثانوية السعيد عبد الحي تصحيح الإختبار الثلاثي الثاني		
المادة : رياضيات	المستوى : 3 هـ ك	العام الدراسي 2009/2008

التمرين الأول :

1) ليكن $u = x + iy$ جذر تربيعي لـ w أي أن $w = u^2$ فيكون لدينا :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| = 40 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) = -32 \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) = 24 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ y^2 = 40 - x^2 \\ xy = 12 \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 36 \\ xy = 12 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 2 \text{ و } y = 6 \\ \text{أو} \\ x = -2 \text{ و } y = -6 \end{cases}$ لأن : $xy \rangle 0$

ومنه : $u = 2 + i6$ أو $u = -2 - i6$.

2) أ - يكون $-i$ جذر لـ $P(Z)$ إذا حقق $P(-i) = 0$ إذن نقوم بحساب $P(-i)$:

$$P(-i) = (-i)^3 + (-6+5i)(-i)^2 + (9-24i)(-i) + 18 + 13i = i - 5i + 6 - 9i - 24 + 18 + 13i = 0$$

ومنه $-i$ هو جذر لـ $P(Z)$.

ب - تعيين a , b , c :

$$P(Z) = (Z+i)(aZ^2 + bZ + c) = aZ^3 + (b+ia)Z^2 + (c+ib)Z + ic$$

ولدينا :

$$P(Z) = Z^3 + (-6+5i)Z^2 + (9-24i)Z + 18 + 13i$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b + ia = -6 + 5i \\ c + ib = 9 - 24i \\ ic = 18 + 13i \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 + 4i \\ c = 13 - 18i \end{cases}$.

ج - حل المعادلة $P(Z) = 0$ في C : $P(Z) = 0$ أي $(Z+i)(Z^2 + (-6+4i)Z + 13 - 18i) = 0$ معناه :

$\begin{cases} Z + i = 0 \\ \text{أو} \\ Z^2 + (-6+4i)Z + 13 - 18i = 0 \end{cases}$ من المعادلة الأولى نجد $Z = -i$, أما المعادلة الأخرى فهي من الدرجة الثانية

يكون مميزها : $\Delta = (-6+4i)^2 - 4(13-18i) = -32 + 24i$ إذن المعادلة تقبل حلين متمايزين وبما أن $\Delta = w$

فإن الجذر التربيعي لـ Δ هو u أي أن: $Z' = \dfrac{-(-6+4i)-(2+6i)}{2}$ و $Z'' = \dfrac{-(-6+4i)+(2+6i)}{2}$

إذن نجد : $Z' = 2 - 5i$ و $Z'' = 4 + i$

ومنه حلول المعادلة هي : $(-i)$, $(2-5i)$, $(4+i)$.

2) أ - كتابة العدد المركب $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ على الشكل الجبري والمثلثي :

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(4+i)-(-i)}{(2-5i)-(-i)} = \frac{4+2i}{2-4i} = i\frac{4+2i}{2i+4} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) .$$

الاستنتاج : $\left|\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \dfrac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|} = \dfrac{AC}{AB} = 1$ أي أن : $AC = AB$.

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(Z_C - Z_A) - \arg(Z_A - Z_B) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

إذن : بما أن $AC = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

ب - T هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$T(M) = M'$ أي أن $Z' = aZ + b \quad ...(*)$.

لمعرفة طبيعة التحويل T وعناصره المميزة نبحث عن قيمتي b و a حيث $T(C)=B$ و $T(A)=A$

بتعويض $T(C)$ و $T(A)$ في (*) نجد :

$\begin{cases} -i = a(-i)+b \\ 2-5i = a(4+i)+b \end{cases}$ بالطرح نجد : $a(4+2i)=2-4i$ أ أن $a=\dfrac{2-4i}{4+2i}=\dfrac{1}{i}=-i=i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

إذن يكون لدينا $|a|=1$ و $\arg(a)=-\dfrac{\pi}{2}$ وبما أن $T(A)=A$ فإن التحويل النقطي T هو دوران مركزه A و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

__التمرين الثاني :__

1)تعين النقط A , B و C مستوي معناه أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا أي أنها ليست على استقامة واحدة.

بما أن $\dfrac{x_{AB}}{x_{AC}} \neq \dfrac{y_{AB}}{y_{AC}}$ أي $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{-2}{-5}$ فإنه لا يوجد λ من $\Re$ الذي يحقق $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A , B و C تعين مستوي (ABC) .

لتعيين معادلة المستوي (ABC) نبحث عن شعاع ناظمي له وليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, هذا الشعاع عمودي على $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ أي أن $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}-a-2b+c=0\\ 2a-5b-3c=0\end{cases}$ وبأخذ $b=1$ يكون لدينا $\begin{cases}-a+c=2\\ 2a-3c=5\end{cases}$ نجد بهذه الجملة $a=-11$ و $c=-9$

إذن $\vec{n}\begin{pmatrix}-11\\1\\-9\end{pmatrix}$.

تكون النقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا حققت $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ معناه :

$-11(x-0)+(y-2)-9(z-3)=0$ بعد النشر والتبسيط نجد $-11x+y-9z+25=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) أ - الشعاع الناظمي $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ لـ (P_1) و $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ لـ (P_2) غير مرتبطين خطيا لأن $\left(\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-1}{1}\right)$, أي أن $\dfrac{x_{\vec{n_2}}}{x_{\vec{n_1}}}\neq\dfrac{y_{\vec{n_2}}}{y_{\vec{n_1}}}$

(P_2) و (P_2) ليسا متوازيين إذن فهما متقاطعان .

ب - لإيجاد التمثيل الوسيطي لـ(Δ) نكتب مثلا y و x بدلالة z أي نأخذه وسيطا $z=t$ حيث t من $\Re$:

$\begin{cases}x+y-t=0\\ x-y-2t-1=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x+y=t\\ x-y=2t+1\end{cases}$ نجد أن $\begin{cases}x=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\\ y=\frac{-1}{2}t+\frac{-1}{2}\\ z=t\end{cases}$ وهي تمثل التمثيل الوسيطي لـ(Δ) .

ج - من التمثيل الوسيطي نستخرج شعاع توجيه لـ(Δ) وليكن $\vec{u}$, بأخذ معاملات t نجد : $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{-1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

__التمرين الثالث :__

1) لإثبات أن b و a أوليان فيما بينهما نبحث على علاقة بين b و a مستقلة عن العدد n .

نلاحظ أن : $2a-3b=2(3n+2)-3(2n+1)=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو فإن العددين b و a أوليان فيما بينهما .

2) التحقق من العلاقة : $3c-4=3(n+2)-4=3n+2=a$ إذن $a=3c-4$

القيم الممكنة لـ $PGCD(a\,,c)$: من العلاقة $a=3c-4$ نجد $3c-a=4$ وليكن $PGCD(a\,,c)=d$

بما أن d يقسم c و a فإنه يقسم $3c-a$ معناه أن d يقسم 4 لأن $3c-a=4$ هذا يعني أن d من قواسم 4 ومنه القيم الممكنة لـ d هي : $d=1\,,d=2\,,d=4$.

أو بطريقة أخرى نقول : بما أن $a=3c-4$ إذن حسب خوارزمية إقليدس $PGCD(a\,,c)=PGCD(c,4)=d$

ومنه d من قواسم 4 فالقيم الممكنة لـ d هي : $d=1\,,d=2\,,d=4$.

3) $\frac{a}{c}=\frac{3c-4}{c}=3-\frac{4}{c}$ إذن $\frac{a}{c}$ عنصرا من $\mathbb{N}$ معناه يجب أن يكون c من قواسم 4 أي أن $c=1$ أو $c=2$ أو $c=4$

ومنه نجد : $n=0$ أو $n=2$ أما $n=-1$ مرفوض لأن n عدد طبيعي .

4) نعلم أن $PGCD(a\,,c)\cdot PPCM(a\,,c)=a\cdot c$ إذن يكون لدينا $(3n+2)(n+2)=4\times 8$ بعد النشر والتبسيط نجد :

$3n^2+8n-28=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=400$ تقبل حلين متمايزين هما $n_1=2$ و $n_2=-\frac{14}{3}$

n_2 مرفوض لأنه ليس طبيعي ومنه قيمة العدد الطبيعي n هي : $n=2$.

كيف تعالج التمارين في الامتحانات

إن الأسئلة التي توضع في الإمتحانات وخصوصا امتحان البكالوريا , قد رعيت فيها جميع الحالات لتكون في متناول أغلبية الممتحنين , فقول بعضهم بعد الخروج من الإمتحان بأن الأسئلة طويلة والوقت غير كاف للإجابة عنها , أو أنها صعبة بل تعجيزية , هي احتجاجات لا مبرر لها ,يمكن التغلب عن صعوبات الإمتحان وغموضه بإتباع النصائح التالية :

1. اقرأ نص الإمتحان كاملا بتمهل وبدقة .
2. اختر المقترح الذي لك فيه القدرة على الإجابة عن معظم أسئلته .
3. ضع خطا تحت كل ما هو غامض لتعود إلية مرة أخرى .
4. لخص الأسئلة وذلك بأخذ العناصر الأساسية .
5. ابدأ بما تجده سهلا ثم انتقل إلى الصعب .
6. أكتب الحل في أوراق المسودة ورتبه مع ترقيم الأجوبة .
7. لا تضيع الوقت في الأسئلة البسيطة فإن الوقت ثمين .
8. بعد التأكد من الحل , أنقل ما كتبته على أوراق المسودة إلى أوراق الإجابة .
9. ضع النتائج داخل إطار .

.01 اختصر الشرح قدر المستطاع .

11. رقم أوراق الإجابة , ثم ضع لكل جواب رقم سؤاله .

.21 راجع ما كتبته بتمعن .

إن اتبعت هذه النصائح ستربح من الوقت نصف ساعة على الأقل والله الموفق والمعين .