ثانوية بن الهيثم بالبيض — السنة الدراسية : 2010 – 2011

القسم : الثالثة تقني رياضي — المدة 4: ساعات

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ ,\vec{k}\ )$. نعتبر النقط :

$A(3\,;1\,;\,-5)$ ، $B(0\,;4\,;\,-5)$ ، C $(-1\,;2\,;\,-5)$ ، $D\ (2\,;3\,;\,4)$.

حدد صحة أو خطأ كل جملة من الجمل الآتية مع التبرير.

1) النقط A ، B و D على استقامة واحدة .

2) المستقيم (AB) محتوى في المستوي الذي معادلته : $x + y = 4$.

3) $18x - 9y - 5z + 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) .

4) النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي .

5) الكرة التي مركزها A ونصف قطرها 9 مماسه للمستوي (BCD).

6) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BD) يكتب :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \dfrac{7}{2} + k \\ z = -\dfrac{1}{2} - 9k \end{cases} \qquad k \in IR$$

التمرين الثاني : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $a = 2$ ، $b = 1 - i$ و $c = 1 + i$.

1) * عين على الرسم النقط A ، B و C (الوحدة : 3cm) .

* اكتب على الشكل الجبري العدد $\dfrac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين .

2) نسمي r الدوران الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C .

* عين زاوية الدوران r ثم d لاحقة النقطة D حيث D = r (C) .

* نسمي Γ الدائرة التي قطرها [BC] . عين ثم أنشئ الصورة Γ' للدائرة Γ بالدوران r .

3) لتكن M نقطة من الدائرة Γ و تختلف عن C لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورة M بالدوران r .

* بين أنه يوجد عدد حقيقي θ ينتمي إلى $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{\pi}{2}\,;2\pi\right[$ حيث $z = 1 + e^{i\theta}$ ..

* عبر عن z' بدلالة θ .

* بين أن $\dfrac{z'-c}{z-c}$ عدد حقيقي. استنتج أن النقط C ، M و M' على استقامة واحدة .

* عين على الرسم النقطة M وصورتها M' من أجل $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

التمرين الثالث : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN بحدها الأول $u_0 = 1 - e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. (e يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري)

1) * في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (الوحدة : 1cm) أنشئ على المجال [0 ; 7-] منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x(2 - x)$ و المستقيم (d) الذي معادلته $y = x$

* استعمل المستقيم (d) ومنحنى f لتعيين على محور الفواصل النقطتين A_0 و A_1 اللتين فاصلتاهما على الترتيب u_0 و u_1 .

* ضع تخمينا حول إشارة المتتالية (u_n) انطلاقا من التمثيل السابق.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \ln(1 - u_n)$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النبيري)

* برر باستعمال نتيجة التخمين السابق وجود المتتالية (v_n) .

* اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب حدها الأول وأساسها.

* تحقق أن : $v_n = 2^n$ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

* تحقق من صحة تخمين السؤال 1)

3) *ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 .

* استنتج مجموعة قيم n التي من أجلها يقبل المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ القسمة على 7 .

التمرين الرابع :

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على IR كما يلي : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) احسب نهاية الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2) ادرس تغيرات الدالة g على IR .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ حيث $0,94 < \propto < 0,95$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على IR .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرف على IR كمايلي : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

1) ادرس إشارة f على IR .

2) احسب نهاية الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

3) احسب عبارة المشتقة $f'(x)$ وبين أن إشارتها هي إشارة $g(x)$.أعط جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن المستقيم D ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5) حدد وضعية (C) بالنسبة لـ D ثم أنشئ المستقيم D و المنحنى (C) . (الوحدة : 2cm).

التصحيح وسلم التنقيط

التمرين الأول : (3 نقاط)

الجملة 1) خاطئة لأن : $\overrightarrow{AB}(-3\ ;3\ ;\ 0)$ و $\overrightarrow{AD}(-1\ ;2\ ;9)$ ولا يوجد عدد حقيقي k يحقق الشرط $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$

لأن المركبة الثالثة لـ $\overrightarrow{AB}$ معدومة و المركبة الثالثة لـ $\overrightarrow{AD}$ غير معدومة . **0.5**

ملاحظة : كيفية أخرى : النقطتان A وB لهما نفس الراقم 5– نستنتج أن المستقيم (AB) محتوى في المستوي الذي معادلته Z= -5 و النقطة D لاتنتمي إلى هذا المستوي.

الجملة 2) صحيحة لأن : إحداثيات كل من A وB تحقق المعادلة $x + y = 4$ فعلا : $3 + 1 = 4$ و $0 + 4 = 4$. **0.5**

الجملة 3) صحيحة لأن : * النقط B ، C ، D ليست على استقامة واحدة لأن $z_B = z_C = -5$ و $z_D \neq -5$

* إحداثيات كل نقطة من النقطB ، C و D تحقق المعادلة : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.

فعلا : $18 \times 0 - 9 \times 4 - 5 \times (-5) + 11 = 0$ ، **0.5**

$18 \times (-1) - 9 \times 2 - 5 \times (-5) + 11 = 0$ و $18 \times 2 - 9 \times 3 - 5 \times 4 + 11 = 0$.

الجملة 4) خاطئة لأن إحداثيات A لاتحقق معادلة المستوي (BCD) . فعلا : $18 \times 3 - 9 \times 1 - 5 \times (-5) + 11 \neq 0$. **0.5**

الجملة 5) خاطئة لأن المسافة بين النقطة A مركز الكرة و المستوي (BCD) لاتساوي نصف قطر الكرة .

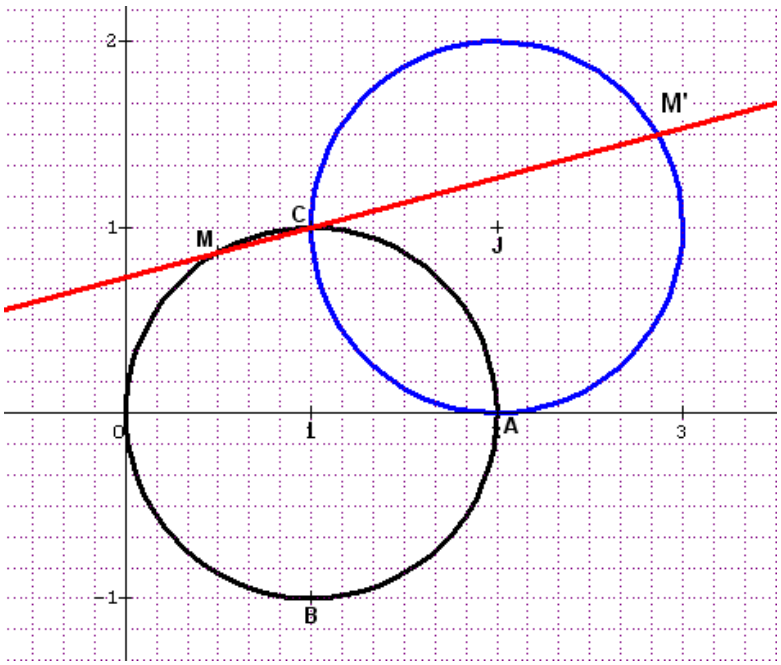
فعلا : $\dfrac{|18 \times 3 - 9 \times 1 - 5 \times (-5) + 11|}{\sqrt{18^2 + (-9)^2 + (-5)^2}} = \dfrac{81}{\sqrt{430}}$ و $\dfrac{81}{\sqrt{430}} \neq 9$ **0.5**

الجملة 6) صحيحة لأن :

- يوجد عدد حقيقي k يحقق : $1 - 2k = 0$ و $\frac{7}{2} + k = 4$ و $-\frac{1}{2} - 9k = -5$ نجد $k = \frac{1}{2}$. **0.5**
- يوجد عدد حقيقي k′ يحقق : $1 - 2k' = 2$ و $\frac{7}{2} + k' = 3$ و $-\frac{1}{2} - 9k' = 4$ نجد $k' = -\frac{1}{2}$.

التمرين الثاني : (7 نقاط)

1) * الرسم : **0.5**



* الشكل الجبري للعدد $\frac{c-a}{b-a}$:

0.5 $$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1+i-2}{1-i-2}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{(-1+i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

الاستنتاج :

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{AC}{AB}=|-i|=1$$

0.5 المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

2) * زاوية الدوران الذي مركزه A ويحول B إلى C هي :

0.5 $$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$$

0.5 * D صورة C بالدوران r تحقق : $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD})=-\frac{\pi}{2}$ و AC = AD ومنه

$$\frac{d-a}{c-a}=-i \quad \text{ومنه} \quad d=-i(c-a)+a=-i(-1+i)+2=3+i$$

* الدائرة Γ مركزها النقطة I منتصف القطعة [BC] لاحقتها

$$\frac{b+c}{2}=\frac{1-i+1+i}{2}=1 \quad \text{ونصف قطرها} \quad \frac{BC}{2}=\frac{|c-b|}{2}=\frac{2}{2}=1$$

0.5

* الدائرة Γ صورتها الدائرة ' Γ نصف قطرها 1 ومركزها النقطة J صورة المركز I بالدوران r .

0.5 لاحقة J هي : $z_J=-i(z_I-a)+a=-i(1-2)+2=2+i$ (انظر الرسم)

3) M نقطة من الدائرة Γ و تختلف عن C لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورة M بالدوران r .

* M نقطة من الدائرة Γ تكافئ IM = 1 تكافئ $|z-1|=1$

0.5 تكافئ وجود عدد حقيقي θ ينتمي إلى $[0\ ;2\pi[$ حيث : $z-1=e^{i\theta}$

ومنه $z=1+e^{i\theta}$. وبما أن M تختلف عن C فإن $z\neq 1+i$ ومنه $z-1\neq i$

0.5 ومنه $e^{i\theta}\neq e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ أي العدد الحقيقي θ ينتمي إلى $[0\ ;\frac{\pi}{2}[\cup[\frac{\pi}{2}\ ;2\pi[$

* تعبير عن z' بدلالة θ : بما أن M' صورة M بالدوران r فإن :

0.5 $$z'=-i(z-a)+a=-i(1+e^{i\theta}-2)+2=-i(e^{i\theta}-1)+2$$

* إثبات أن العدد $\frac{z'-c}{z-c}$ حقيقي :

$$\frac{z'-c}{z-c}=\frac{-i(e^{i\theta}-1)+2-1-i}{1+e^{i\theta}-1-i}=\frac{-ie^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-i}$$

0.5

مرافق العدد $e^{i\theta} - \mathrm{i}$ هو $e^{-i\theta} + \mathrm{i}$ نستنتج أن :

0.5 $$\frac{z' - c}{z - c} = \frac{-ie^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - \mathrm{i}} = \frac{(-ie^{i\theta} + 1)}{(e^{i\theta} - \mathrm{i})} \times \frac{(\mathbf{e^{-i\theta} + i})}{(\mathbf{e^{-i\theta} + i})} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{|e^{i\theta} - \mathrm{i}|^2}$$

بما أن $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ عدد حقيقي (دساتير اولر) و $|e^{i\theta} - \mathrm{i}|^2$ عدد حقيقي نستنتج أن $\frac{z' - c}{z - c}$ عدد حقيقي . 0.5

نسمي k العدد الحقيقي $\frac{z' - c}{z - c}$ ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{CM'} = k\,\overrightarrow{CM}$ ومنه النقط C ، M و M' على استقامة واحدة .

* رسم النقط C ، M و M' : - نعين النقطة M على الدائرة Γ فاصلتها : $1 + cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

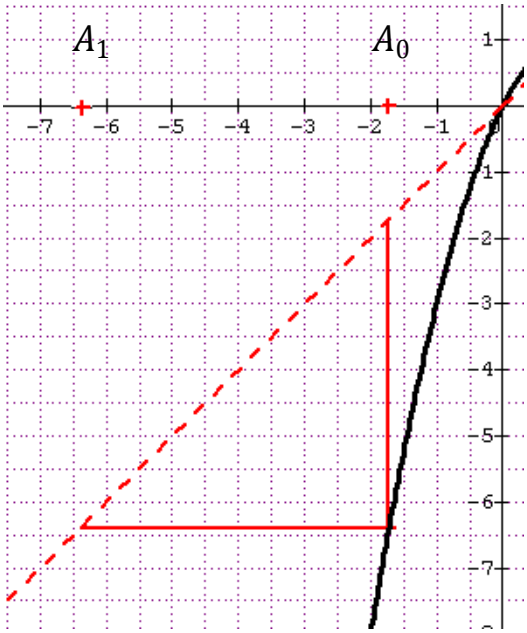
- النقطة M' هي نقطة تقاطع المستقيم (CM) و الدائرة Γ ' .

0.5

التمرين الثالث : $u_0 = 1 - \mathrm{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \mathrm{u_n}(2 - u_n)$

1) * تعيين النقطتين A_0 و A_1 اللتين فاصلتاهما على الترتيب u_0 و u_1

(4.25 نقطة)



0.5

* التخمين : المتتالية (u_n) سالبة تماما . 0.25

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \ln(1 - u_n)$

* بناءا على التخمين السابق : $u_n < 0$ ومنه $1 - u_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة على IN . 0.25

* إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية .

$$v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln\big(1 - u_n(2 - u_n)\big) = \ln(1 - 2\,u_n + u_n^2) = ln[(1 - u_n)^2]$$

0.5 $$= 2\ln(1 - u_n) = 2\,v_n$$

نستنتج أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln(e) = 1$.

* عبارة v_n ثم u_n بدلالة n :

$v_n = v_0 \times (2)^n = 1 \times 2^n = 2^n$ 0.25

$v_n = \ln(1 - u_n)$ تكافئ $1 - u_n = e^{v_n}$ تكافئ $u_n = 1 - e^{2^n} = 1 - e^{2^n}$. 0.5

* التحقق من صحة تخمين السؤال 1) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $2^n > 0$ تكافئ $e^{2^n} > e^0$ تكافئ $e^{2^n} > 1$ تكافئ $-e^{2^n} < -1$

تكافئ $1 - e^{2^n} < 0$ تكافئ $u_n < 0$. 0.5

3) * دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 .

$2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$ 0.5

نستنتج : من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{3k} \equiv 1[7]$ و $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

* المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$ مجموع حدود متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

نستنتج أن : (عدد حدود المجموع هو n+1). 0.5

يكون

$$S_n = 1 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

المجموع S_n قابلا للقسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 0[7]$ أي $2^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$

من السؤال السابق نستنتج أن $n + 1 = 3k$ ومنه $n = 3k - 1$. مع k عدد طبيعي غير معدوم . 0.5

التمرين الرابع : (5.75)

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على IR كمايلي : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1) حساب نهاية الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$:

بما أن

$\lim_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (2x - 7) = +\infty$ فإن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ 0.25

بما أن :

$\lim_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (2x - 7) = -\infty$ فإن $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ 0.25

2) دراسة تغيرات الدالة g : الدالة g قابلة للاشتقاق على IR ومن اجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = 2e^x + 2$$ **0.25**

بما أن $2e^x > 0$ فإن $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على IR . **0.25**

جدول تغيرات الدالة g : **0.25**

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على IR . صورة المجال IR هو المجال IR وبما أن 0 ينتمي إلى IR فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حقيقي وحيد α صورته 0 أي $g(\alpha) = 0$. **0.5**

بما أن : $g(0.94) = -0.000037$ و $g(0.95) = -0.000071$ فإن $0.94 < \alpha < 0.95$. **0.25**

4) إشارة $g(x)$: بما أن الدالة g متزيدة تماما على IR نستنتج أن :

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$ ومنه g موجبة تماما على المجال $]\alpha ; +\infty[$.

إذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$ ومنه g سالبة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha[$. **0.5**

<u>الجزء الثاني</u> : الدالة f المعرف على IR كمايلي : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

1) دراسة إشارة f على IR :

$f(x) = 0$ تكافئ $(2x-5=0)$ أو $(1-e^{-x}=0)$ تكافئ $(x=\frac{5}{2})$ أو $(x=0)$.

جدول الإشارة :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0.5

نستنتج أن f موجبة تماما على كل مجال من المجالين $]-\infty\ ;\ 0[$ و $]\frac{5}{2}\ ;\ +\infty[$ وسالبة تماما على المجال $]0\ ;\ \frac{5}{2}[$ وتنعدم من أجل $x=\frac{5}{2}$ أو $x=0$.

2) حساب نهاية الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$:

بما أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **0.25**

بما أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x})=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-5)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ **0.25**

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ومن اجل كل عدد حقيقي x : **0.5**

$$f'(x)=2(1-e^{-x})+(2x-5)(-(-e^{-x}))$$
$$=2-2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}=2-7e^{-x}+2xe^{-x}=2-\frac{7}{e^x}+\frac{2x}{e^x}$$
$$=\frac{2e^x-7+2x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$$

بما أن e^x دوما موجب فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه جدول تغيرات الدالة f : **0.5**

	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	—	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4) بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-5)]=\lim_{x\to+\infty}(2x-5)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{5}{e^x}+\frac{2x}{e^x}=0$$

نستنتج أن المستقيم D ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. **0.25**

5) وضعية (C) بالنسبة لـ D : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x-5)$ أي إشارة $(2x-5)e^{-x}$

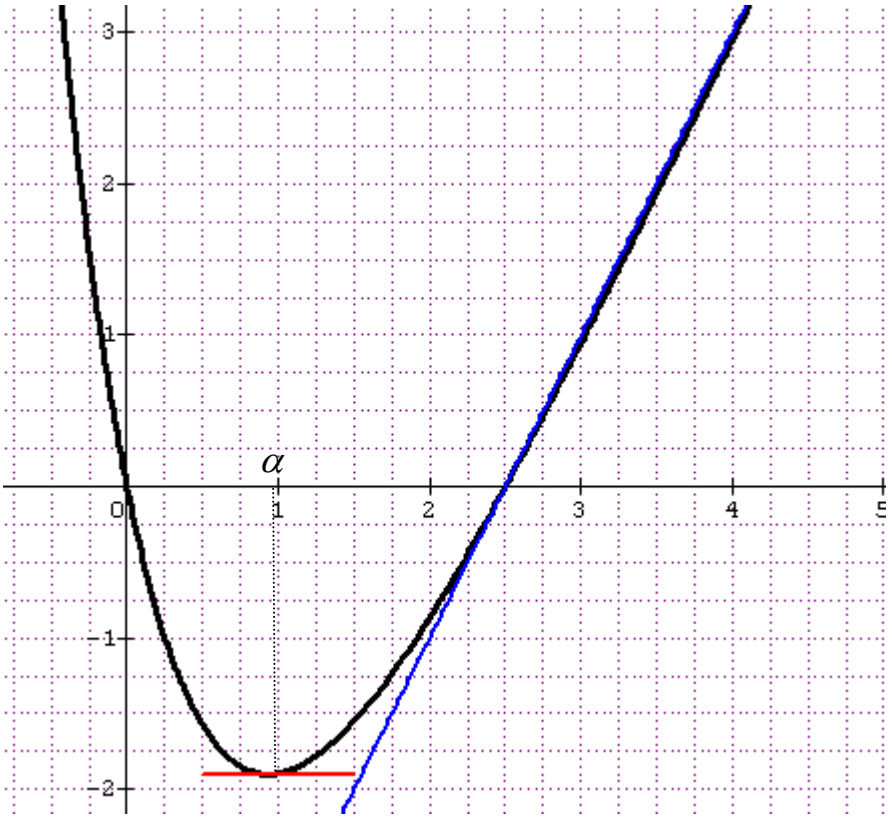
نستنتج مايلي :

إذا كان : $x>\frac{5}{2}$ أي $2x-5>0$ فإن $f(x)-(2x-5)>0$ ومنه المنحنى (C) أعلى D .

إذا كان : $x<\frac{5}{2}$ أي $2x-5<0$ فإن $f(x)-(2x-5)<0$ ومنه المنحنى (C) أسفل D .

إذا كان : $x=\frac{5}{2}$ أي $2x-5=0$ فإن $f(x)-(2x-5)=0$ ومنه المنحنى (C) يقطع D في النقطة ذات الاحداثيين $\left(\frac{5}{2};0\right)$. **0.5**

التمثيل البياني :



0.5

تم بفضل الله بتاريخ : 03/03/2011 من طرف الأستاذ حميدي بوثلجة أستاذ بثانوية

بن الهيثم بالبيض