ثانوية بلعروسي بن يحيى – الرابطة السنة الدراسية 2012-2013

المستوى: الثالثة علوم تجريبية المدة: ساعتان

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (10 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر المستويات :

$(P): x + y - 2z + 1 = 0$ ، $(Q): 2x - y + z - 4 = 0$ ، $(\pi) : 3x - z - 3 = 0$

1/ بين أن (P) و (Q) غير متوازيين.

2/ تحقق أن النقطة $I(1, -2, 0)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

3/ برهن أن الشعاع $\vec{n}(1, 5, 3)$ يوازي كلا من (P) و (Q). استنتج مما سبق تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) مستقيم تقاطع (P) و (Q).

4/ لتكن B و C مسقطي $A(1, 0, 0)$ على (P) و (Q) على التوالي.

أ/ بين أن إحداثيات B هي $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

ب/ أثبت أن المستوي (ABC) عمودي على المستقيم (D). استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

5) $M(a, b, c)$ نقطة كيفية من المستوي (π) .

أ/ بين أن المسافة بين M و (P) و بين M و (Q) متساويتان أي: $d(M, (P)) = d(M, (Q))$.

ب/ تحقق أن $A \in (\pi)$ ثم احسب المسافة بين A و (P).

جـ/ لتكن (E) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث:

$x^2 - 2x + y^2 + z^2 + \frac{1}{3} = 0$.

بين أن (E) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

د/ استنتج أن (E) مماس لكل من (P) و (Q).

التمرين الثاني (10نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 – أ – اكتب العدد المركب $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ على الشكل الأسي.

ب – تحقق أن : $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

جـ – أثبت أن $\overline{\omega} = \omega^2$ وأن $\overline{\omega} = -(\omega + 1)$.

2 – نعتبر في C المعادلة : $|z| = |z + 1| = 1$ ....(1) .

أ– أثبت أن ω يحقق المعادلة (1) .

ب – بين أنه إذا كان $z = x + i y$ حلا للمعادلة (1) فإن $x = -\frac{1}{2}$.

جـ - استنتج أن حلول المعادلة (1) هي ω و $\overline{\omega}$ فقط .

3 – نعتبر النقط A, B , C من الدائرة ذات المركز O ونصف القطر R .

نفرض أن O مركز ثقل المثلث ABC أي أن :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$..............................(2) .

لتكن الأعداد المر كبة a, b, c لواحق النقط A, B, C على الترتيب. نضع : $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$.

أ– اشرح لماذا $|a| = |b| = |c| = R$.

ب– بالاعتماد على (2) بين أن : $a + b + c = 0$ واستنتج أن $1 + p + q = 0$

جـ – تحقق أن: $|p| = |q| = 1$ وأن $|1 + p| = | q| = 1$.

د – استنتج القيم الممكنة للعدد p .

4 – نفرض أن: $p = \omega$.

أ – تحقق أن: $|\omega - 1| = |\overline{\omega} - 1| = |\sqrt{3}i|$

ب – بين أن : $q = \overline{\omega}$ ، $b = a\omega$ و $c = a\overline{\omega}$

جـ – أثبت أن: $b - a = a(\omega - 1), c - b = a\sqrt{3}i, c - a = (\overline{\omega} - 1)a$

د – استنتج مما سبق أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

<u>ملاحظة</u> : بحل هذا التمرين تكون قد برهنت على النتيجة التالية :

إذا انطبق مركز الدائرة المحيطة بمثلث على مركز ثقله فإن هذا المثلث متقايس الأضلاع

بالتوفيق.

الإجابة النموذجية

التمرين الأول :

$\vec{n}_p(1,1,-2)$ ، $\vec{n}_q(2,-1,1)$ ناظميان على (P)، (Q) على الترتيب.

1) $\vec{n}_p(1,1,-2)$ و $\vec{n}_q(2,-1,1)$ غير مرتبطين خطيا.

2) نتحقق بالحساب أن $I\in(P)$ و $I\in(Q)$.

3) نتأكد أن $\vec{n}_p.\vec{n}=0$ و $\vec{n}_q.\vec{n}=0$.

$\vec{n}$ شعاع توجيه لـ (D) و I نقطة منه. تمثيل وسيطي لـ (D)

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 5t-2 \qquad t\in IR \\ y = z = 3t+1 \end{cases}$$

4) أ/ نتحقق بالحساب أن $B\in(P)$ و (AB) يعامد (P).

ب/ (AB) يعامد (P) وبالتالي يعامد (D) وكذلك (AC) يعامد (Q) وبالتالي يعامد (D) . واضح أن (AB) و (AC) غير متوازيان ومنه (D) يعامد المستوي (ABC) .

إذن $\vec{n}(1,5,5)$ شعاع ناظم على (ABC) . بعد الحساب نجد

(ABC) : x +5y +3z – 1 = 0 .

5)أ/ $M\in(\pi)$ ومنه $3a-c-3=0$.

$$d(M,(P)) = \frac{|a+b-2c+1|}{\sqrt{6}} = \frac{|3a-c-3-3a+c+3+a+b-2c+1|}{\sqrt{6}} = \frac{|-3a+c+3+a+b-2b+1|}{\sqrt{6}} = \frac{|-2a+b-c+4|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|-(2a-b+c-4)|}{\sqrt{6}} = d(M,(Q)).$$

ب/ واضح أن A نقطة من (P) . $d(A,(P)) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

جـ/ (S) سطح كرة مركزها A ونصف قطرها

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

د/ A نقطة من (P) ومنه $d(A,(P)) = d(A,(Q)) = R$ ومنه (S) مماس لكل من (P) و (Q) .

التمرين الثاني :

1- أ- $\omega = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

ب - $\omega^2+\omega+1 = \frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+1=0$

جـ - $\omega^2 = \frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\omega}$.

$\omega^2+\omega+1=0$ ومنه $\omega^2=-(\omega+1)$ إذن $\bar{\omega}=-(\omega+1)$.

2 – أ- واضح أن $|\omega| = |\omega+1| = 1$.

ب - $|z| = |z+1|$ معناه $|x+iy| = |(x+1)++iy|$ ومنه $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$ أي $x = -\frac{1}{2}$. أي

$z = -\frac{1}{2}+iy$.

$|z|=1$ يكافئ $\frac{1}{4}+y^2=1$ أي $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega$ أو $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{\omega}$.

3 – أ/ OA=OB=OC=R ومنه

. $|a| = |b| = |c| = R$

ب- الأعداد a, b, c هي لواحق الأشعة $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ على التوالي ومنه a+b+b =0. بالقسمة على a

نجد $1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$.

جـ - $|p| = \frac{|b|}{|a|} = 1$ ، $|q| = \frac{|c|}{|a|} = 1$.

1 + p + q = 0 ومنه q =– (p+1) إذن

$|1+p| = |q| = 1$.

د- $|1+p| = |p| = 1$ ومنه $p = \omega$ أو $p = \overline{\omega}$.

4 أ- بالحساب نجد :

$$|\omega - 1| = |\overline{\omega} - 1| = |\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

ب- $q = -(1+\omega) = \overline{\omega}$

$p = \frac{b}{a}$ ومنه $b = a\,p = a\,\omega$.

$q = \frac{c}{a}$ ومنه $c = a\,q = a\overline{\omega}$.

جـ -

$$b - a = a\omega - a = a(\omega - 1)$$
$$c - a = a\overline{\omega} - a = a(\overline{\omega} - 1)$$
$$c - b = a\omega - a\overline{\omega} = a(\omega - \overline{\omega}) = a\sqrt{3}i$$

د-

$$AC = |b - c| = |a(\overline{\omega} - 1)| = |a||\overline{\omega} - 1| = R\sqrt{3} \quad AB = |b - a| = |a(\omega - 1)| = |a||\omega - 1| = R\sqrt{3}$$
$$CB = |b - c| = |a\sqrt{3}i| = |a||\sqrt{3}i| = R\sqrt{3}$$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.