التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، تعطى النقط $A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(6;-7;-1)$ و $D(2;1;3)$.

1) أ- عين إحداثيات النقطة E مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

ب- استنتج (Γ)مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$.

2) أ- بين أن النقط A , B و D تعين مستوياً.

ب- بين أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD).

جـ-عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD).

3) أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC).

ب- عين إحداثيات النقطة F تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD) .

4) بين أن المستوي (ABD) و (Γ) متقاطعان ، ثم حدد العناصر الأساسية لمجموعة تقاطعهما .

التمرين الثاني:

في المستوي المركب المنسوب إلي المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I) 1. أ- أكتب z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب- علم النقط A ، B و C .

1) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

2) عين ، ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

II) 1) f التحويل الذي يرفق بكل نقطة Mذات اللاحقة z ، $(z\neq z_A)$النقطة M'ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{-4}{z-2}$

أ- حل في ℂ المعادلة : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

ب- استنتج صورتي النقطتين B و C بالتحويل f .

جـ- نسمي G مركز ثقل المثلث OAB . عين ، ثم علم النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل f .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq 2$: $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

ب- بين أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أرسم (γ) .

التمرين الثالث:

I) لتكن الدَالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(2-x)e^{x}-1$

1- عين نـهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- أ- أدرس تغيرات الدَالة g .

ب- أحسب : $g(-2)$ ، $g(0)$ ، $g(1)$ و $g(2)$.

جـ-شكل جدول تغيرات الدالة g .

3- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. نرمز بـ α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha \prec \beta$.

4- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدَالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ، $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1- عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين بيانيا .

2- أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-x)^{2}}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدَالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3- أ- بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، (حيث α العدد المعرف في السؤال 3- من الجزء I)) .

ت- علما أن : $-1{,}16 \prec \alpha \prec -1{,}14$ و $1{,}83 \prec \beta \prec 1{,}85$ استنتج حصرا للعدديين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

(تدور النتائج إلى 10^{-2}) . ثم أرسم (C_f) .

III) h الدَالة المعرفة كما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

1- عين مجموعة تعريف الدالة h .

2- أ- أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$.

ب- استنتج إشارة $h'(x)$.

جـ-شكل جدول تغيرات الدَالة h .

تصحيح اختبار الفصل الثاني

حل التمرين الأول

$A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(6;-7;-1)$ و $D(2;1;3)$.

1) أ- تعين إحداثيات النقطة E مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

لدينا :
$$\begin{cases} x_E = \dfrac{2x_A+(-1)x_B+1x_C}{2+(-1)+1} = \dfrac{2-0+6}{2} = 4 \\ y_E = \dfrac{2y_A+(-1)y_B+1y_C}{2+(-1)+1} = \dfrac{-2-3-7}{2} = -6 \\ z_E = \dfrac{2z_A+(-1)z_B+1z_C}{2+(-1)+1} = \dfrac{6-1-1}{2} = 2 \end{cases}$$
ومنه $E(4;-6;2)$

ب- استنتاج (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$.

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$ معناه $\left\|2\overrightarrow{ME}\right\| = 2\sqrt{21}$ ومنه $ME = \sqrt{21}$

(Γ) سطح كرة مركزها E ونصف قطرها $R = \sqrt{21}$.

2) أ- تبيان أن النقط A , B و D تعين مستوياً.

A , B و D تعين مستوي إذا وفقط إذا كانت النقط A ,B و D ليست في استقامية أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ لدينا : $x_{\overrightarrow{AB}} = -1x_{\overrightarrow{AD}}$ لكن $y_{\overrightarrow{AB}} \neq -1y_{\overrightarrow{AD}}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا.

ب -تبيان أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD).

$(EC)\perp(ABD)$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{EC}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من (ABD)

لدينا : $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ، $\begin{cases}-1\times2+4\times(-1)+(-2)\times(-3)=0\\ 1\times2+2\times(-1)+0\times(-3)=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ إذن $(EC)\perp(ABD)$

جـ-تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABD).

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABD) و بالتالي $(ABD): 2x-y-3z+d=0$

$2\times0-1\times3-3\times1+d=0$ معناه $B(0;3;1)\in(ABD)$ ومنه $d=6$ إذن $(ABD): 2x-y-3z+6=0$

3) أ- تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC).

(EC) مستقيم يشمل النقطة $E(4;-6;2)$ و $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له إذن : $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-6-t \;/\; t\in\mathbb{R}\\ z=-3-3t\end{cases}$

ب- تعيين إحداثيات النقطة F تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD) .

نحل الجملة : (1)......... $\begin{cases} \begin{cases} x = 4+2t \\ y = -6-t \\ z = 2-3t \end{cases} \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$ ، (1) تكافئ $2(4+2t)-(-6-t)-3(2-3t)+6=0$

(1) تكافئ $14t+14=0$ أي $t=-1$ بالتعويض نجد $F(2;-5;5)$.

4) تبيان أن المستوي (ABD) و (Γ) متقاطعان .

لدينا : $d(E;(ABD)) = \dfrac{|2\times4-1\times(-6)-3\times2+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ و $d(E;(ABD)) \prec R$ إذن

المستوي (ABD) و (Γ) يتقاطعان وفق دائرة (C) .

ملاحظة : بما أن $(EC)\perp(ABD)$ و $(ABD)\cap(EC)=\{F\}$ فإن $d(E;(ABD)) = EF = \sqrt{14}$

- تحديد العناصر الأساسية لمجموعة التقاطع: مركز الدائرة (C)، النقطة $F(2;-5;5)$.
- حساب r نصف قطر الدائرة (C) .

لدينا : $[d(E;(ABD))]^2 + r^2 = R^2$ ومنه $(\sqrt{14})^2 + r^2 = (\sqrt{21})^2$ إذن $r=\sqrt{7}$.

حل التمرين الثاني

$z_A = 2$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

I) 1. أ- <u>كتابة z_B و z_C على الشكل الأسي .</u>

$$z_B = 1+i\sqrt{3} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C = 1-i\sqrt{3} = \overline{z_B} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب- تعليم النقط A ، B و C .

3) تعين طبيعة الرباعي $OBAC$.

لدينا : $z_{\overrightarrow{OB}}=z_{\overrightarrow{CA}}=1+i\sqrt{3}$ معناه $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$ إذن $OBAC$ متوازي أضلاع ، و $OB=OC=2$ معناه $OBAC$ معين .

4) تعيين ، ثم أنشاء (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

لدينا $|z|=|z-2|$: تكافئ $OM=AM$ ومنه (Δ) المستقيم محور القطعة $[OA]$.

II) 1) f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{-4}{z-2}$

أ- حل المعادلة : $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

لدينا : $z=\dfrac{-4}{z-2}$ تكافئ $z^2-2z+4=0$ ، ($\Delta=-12$ ، $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{\ }$)

ب- استنتاج صورتي النقطتين B و C بالتحويل f .

نلاحظ أن حلي المعادلة هي لاحقتا النقطتين B و C ، وبالتالي B و C نقتان صامدتان بالتحويل f .

ومنه $z_{B'}=z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_{C'}=z_C=1-i\sqrt{3}$.

جـ G مركز ثقل المثلث OAB . تعين ، ثم علم النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل f .

لدينا : $z_G=\dfrac{z_0+z_A+z_B}{3}=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$ و بالتالي $z_{G'}=\dfrac{-4}{z_G-2}=\dfrac{-4}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i-2}=3+i\sqrt{3}=3z_G$

$z_{G'}=3z_G$ معناه $\overrightarrow{OG'}=3\overrightarrow{OG}$ و بالتالي النقط O ، G و G' في استقامية .

2) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq 2$: $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

لدينا : $z'=\dfrac{-4}{z-2}$ تكافئ $z'-2=\dfrac{-4}{z-2}-2$ أي $z'-2=\dfrac{-2z}{z-2}$ ومنه $|z'-2|=\left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|=\dfrac{|-2z|}{|z-2|}=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$

ت- تبيان أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أرسم (γ) .

لدينا $|z|=|z-2|$: و $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$ ومنه $2=\dfrac{2|z-2|}{|z-2|}=\dfrac{2|z|}{|z-2|}=|z'-2|$ إذن $|z'-2|=2$ أي $OM'=2$

و بالتالي (γ) الدائرة ذات المركز $A(z_A)$ و نصف قطرها 2 .

التمرين الثالث

I) g المعرفة على ℝ كما يلي : $g(x)=(2-x)e^x-1$

1- تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{2e^x}_{0}-\underbrace{xe^x}_{0}-1\right]=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\underbrace{(2-x)}_{-\infty}\underbrace{e^{x}}_{+\infty}}_{-\infty}-1\right]=-\infty$$

2- <u>أ-دراسة تغيرات الدَالة g .</u>

<u>المشتقة</u> : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=(1-x)e^{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-x)$

ب- $g(-2)=4e^{-2}-1\simeq -0,46$ ، $g(0)=1$ ، $g(1)=e-1\simeq 1,71$ و $g(2)=-1$.

جـ- جدول تغيرات الدالة g .

3- تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$. نرمز بـ α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha \prec \beta$.

الدالة g مستمرة متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ ، و بالخصوص على المجال $[-2;0]$ و $g(-2)\times g(0)\prec 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]-\infty;1]$.

الدالة g مستمرة متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ ، و بالخصوص على المجال $[1\,;2]$ و $g(1)\times g(2)\prec 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في $[1;+\infty[$.

4- <u>استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.</u> [redacted]

(II $\quad D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1-\overbrace{e^{-x}}^{0}}{1+\underbrace{\left(-xe^{-x}\right)}_{0}}\right]=1$ ، المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ(C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\overbrace{e^{x}-1}^{-1}}{\underbrace{e^{x}-x}_{+\infty}}\right)=0$ ، المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب لـ(C_f) بجوار $-\infty$.

2- أ- المشتقة : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{-xe^x+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{\left(2-x\right)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدَالة f

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(e^x-x\right)^2 > 0$ ، ومن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

<u>جدول تغيرات الدالة f :</u>

3- أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ ، (حيث α العدد المعرف في السؤال 3- من الجزء I) .

لدينا : $f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{e^\alpha-\alpha}$..........$(1)$

$g(\alpha)=0$ معناه $\left(2-\alpha\right)e^\alpha+1=0$ ومنه $\boxed{e^\alpha=\frac{1}{2-\alpha}}$..........$(2)$

من (1) و (2) (بالتعويض) نجد : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$

ب- علما أن : $-1,16 < \alpha < -1,14$ و $1,83 < \beta < 1,85$ استنتاج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

(تدور النتائج إلى 10^{-2}) .

لدينا : $-1,16 < \alpha < -1,14$ بإضافة (-1) نجد $-2,16 < \alpha-1 < -2,14$

الدالة مقلوب متناقصة تماما على $\mathbb{R}_-^*$ ومنه $\frac{1}{-2,14} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{-2,16}$ إذن $\boxed{-0,47 < f(\alpha) < -0,46}$

بنفس الطريقة نجد: $\boxed{1,18 < f(\beta) < 1,20}$

<u>الرسم:</u>

(III $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1- تعين مجموعة تعريف الدالة h .

h معرفة إذا وفقط إذا كان $f(x)\neq 0$ أي $x\neq 0$ ومنه $D_h=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

2- أ- حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $h'(x)=\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

ب- استنتاج إشارة $h'(x)$.

من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $[f(x)]^2 \succ 0$ ، ومنه إشارة $h'(x)$ من إشارة $[-f'(x)]$.

جـ جدول تغيرات الدَالة h .

التمثيل البياني للدالة h

من إعداد الأستاذ

ع/طيار