الموضوع رقم : 08

# تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

**التمرين الأول:**

1. $f$ دالة معرفة كما يأتي: $f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$ .

- خطأ: الدالة $f$ معرفة على $]1;+\infty[$ .
- صحيح: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ .
- صحيح: $\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ .

2. $f$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$ .

- خطأ: $f'(x)=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$ . إذن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ .
- صحيح: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$ و منه إشارة $g'$ هي من نفس إشارة $x^2-1$ .
- خطأ: على $]0;+\infty[$ الدالة $g$ تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 تساوي 3.
- خطأ: على $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 3$ أي $g(x)>0$ و منه $f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

**التمرين الثاني:**

1. بفرض $q$ أساس المتتالية يكون لدينا: $U_5=U_3\times q^2$ و منه $q^2=4$ و بما أن الحدود موجبة فإن $q=2$ . نعلم أن $U_3=U_0\times q^3$ و منه $U_0=3$ . و بالتالي: $U_n=3\times 2^n$ .
2. $S_n=U_0\times\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ و منه $S_n=3(2^{n+1}-1)$ .
3. $S_n=381$ يعني $3(2^{n+1}-1)=381$ أي $2^{n+1}=128$ و عليه $2^{n+1}=2^7$ و منه $n=6$ .
4. لدينا: $P_n=U_0q^1\times U_0q^2\times\ldots\times U_0q^n$ و منه $P_n=U_0{}^n(q^1\times q^2\times\ldots\times q^n)$

نجد هكذا: $P_n=U_0{}^n\times q^{1+2+\ldots+n}$ و عليه: $P_n=3^n\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

**التمرين الثالث:**

$\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ يعني $\begin{cases}y=3x\\ x^2+2y=16\end{cases}$ مع $xy>0$ أي $\begin{cases}3x=y\\ x^2+6x-16=0\end{cases}$ .

للمعادلة $x^2+6x-16=0$ حلان هما 2 و $-8$ .

من أجل $x=2$ لدينا $y=6$ و من أجل $x=-8$ لدينا $y=-24$ .

للجملة إذن حلان هما: $(2;6)$ ، $(-8;-24)$ .

**التمرين الرابع:**

أ) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ .

1. $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ .

2. الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x)=-\frac{x+1}{x^2}$ .

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ و منه الدالة $f$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ .

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

3. الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ و $0\in]-\infty;+\infty[$ ،

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ .

لدينا من جهة ثانية $f(1)\times f(2)<0$ لأن $f(1)=1$ و $f(2)\simeq -0,2$ . إذن $1<\alpha<2$ .

4. معادلة المماس $(\Delta)$ هي: $y=-2x+3$ .

لدينا: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2x-3$ .

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^2}$ .

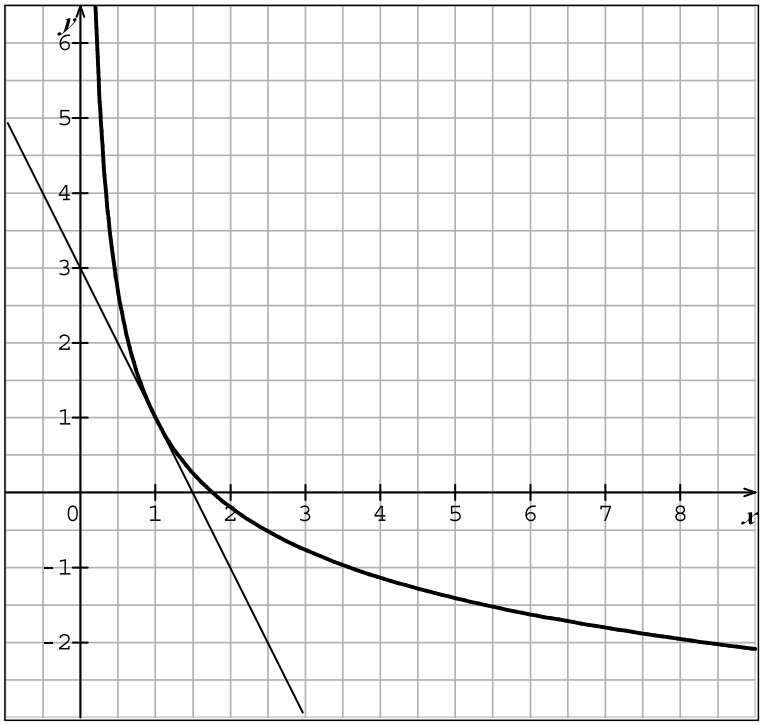
إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x^2-x-1$ و الذي جذراه $1$ و $-\frac{1}{2}$ و منه جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

نستنتج من جدول التغيرات السابق أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 0$ وهذا يعني أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f(x)-(-2x+3)\geq 0$ .

نستنتج هكذا أن المنحني $(C)$ يقع أعلى مماسه $(\Delta)$ .

5. الرسم:




6. نضع $h(x)=x\ln(x)-x+k$.

من الواضح أنت الدالة $h$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $h'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1$.

و منه $h'(x)=\ln x$.

إذن الدالة: $x\to x\ln(x)-x+k$ $(k\in\mathbb{R})$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على $]0;+\infty[$.

7. لدينا: $A(\alpha)=\int_1^{\alpha}f(x)dx$ و منه $A(\alpha)=[\ln x-x\ln x+x]_1^{\alpha}$.

نجد هكذا أن $A(\alpha)=(\alpha-1)(1-\ln\alpha)$.

نعلم أن $f(\alpha)=0$ و هذا يعني أن $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}$.

بالتعويض في $A(\alpha)$ نحصل على $A(\alpha)=(\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$.

و هكذا نجد في الأخير أن $A(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ $u.a$.