الموضوع رقم : **06**

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. لدينا: $f(\bar{z})=\frac{2\bar{z}-i}{\bar{z}+1-i}$ و بالتالي:

$f(\bar{z})=-2$ يعني $\frac{2\bar{z}-i}{\bar{z}+1-i}=-2$ و هذا يعني $2\bar{z}-i=-2\bar{z}-2+2i$.

نحصل هكذا على $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$ أي $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$.

2. نجد بعد التعويض أن:

$\mathrm{Re}(f(z))=\frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ و $\mathrm{Im}(f(z))=\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$.

3. يكون $f(z)$ حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Im}\,f(z))=0$.

$\mathrm{Im}\,f(z))=0$ يعني $x+2y-1=0$ و $(x+1)^2+(y-1)^2\neq 0$

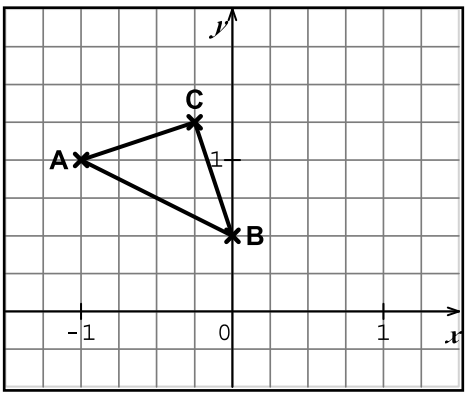
مجموعة النقط هي إذن مجموعة نقط المستقيم ذو المعادلة $x+2y-1=0$ ماعدا النقطة $A(-1;1)$.

4. $|f(z)|=2$ يعني $\left|\frac{2z-i}{z+1-i}\right|=2$ أي $\frac{\left|2\left(z-\frac{i}{2}\right)\right|}{|z+1-i|}=2$

و هذا يعني $\frac{\left|2\left(z-\frac{i}{2}\right)\right|}{2}=|z+1-i|$ أي $\left|z-\frac{i}{2}\right|=|z-(-1+i)|$.

لدينا إذن $BM=AM$ أي $AM=BM$.

مجموعة النقط M التي تحقق $|f(z)|=2$ هي إذن محور القطعة المستقيمة $[AB]$.



5. إثبات أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C.

لدينا: $|z_A-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}$ و $|z_B-z_C|=\frac{1}{4}\sqrt{10}$.

نستنتج هكذا أن $AC=BC$ و منه فالمثلث ABC متساوي الساقين.

لدينا من جهة ثانية: $|z_A-z_B|=\frac{1}{2}\sqrt{5}$ و عليه $BA=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

نلاحظ أن $AC^2+BC^2=BA^2$ و منه فالمثلث ABC قائم في C.

إذن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في C.

التمرين الثاني:

1. إثبات أن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$. و منه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.

نستنتج هكذا الدالة أن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن اعتبار f الدالة المركبة من الدالتين $x\mapsto x+1$ متبوعة بالدالة $x\mapsto \ln x$ و علما أن كلاهما متزايدة فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2. نسمي $P(n)$ الخاصية: " من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$ ".

*لدينا $u_0=e$ و منه $u_0>0$. إذن $P(0)$ صحيحة.

* نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n>0$.

* لنثبت صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ و منه $1+u_n>1$ و عليه $\ln(1+u)_n>0$. نستنتج هكذا أن $u_{n+1}>0$.

إذن $P(n+1)$ صحيحة.

و عليه $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=\ln(x+1)-x$.

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $g'(x)=-\frac{x}{x+1}$ و منه فإشارة $g'(x)$ عي عكس إشارة x .

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

و منه إشارة $g(x)$ هي كالآتي:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

بما أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)<0$ فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)<x$.

علما أن $u_n>0$ فإن $f(u_n)<u_n$ و منه $u_{n+1}<u_n$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4. بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة.

إذا فرضنا أن نهايتها هي l فإن $f(l)=l$ أي $f(l)-l=0$ و هدا يعني أن $g(l)=0$.

لدينا من دراسة إشارة $g(x)$ ، $g(0)=0$ و عليه فإن $l=0$.

التمرين الثالث:

أ) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي : $h(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}-e^{-x}+2\right)$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h'(x)=(2-x)e^{-x}$.

إشارة $h'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $2-x$. و منه جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

2. تبيان أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38;-0.37[$.

الدالة h مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty;2[$ و منه على المجال $]-0.38;-0.37[$ و بما أن $h(-0.38)\times h(-0.37)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38;-0.37[$.

3. إشارة $h(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

6. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}+2$.

و هكذا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=h(x)$.

7. دراسة تغيرات الدالة f : إشارة $f'(x)$ هي إذن من نفس إشارة $h(x)$.

لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

8. لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

9. لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب (d) ندرس إشارة $f(x)-(2x+1)$.

لدينا: $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ و منه فإشارة $f(x)-(2x+1)$ هي عكس إشارة x.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(2x+1)$	$+$	‖	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	‖	(C_f) تحت (d)

10. نقطة الانعطاف: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f''(x)=h'(x)$ و منه:

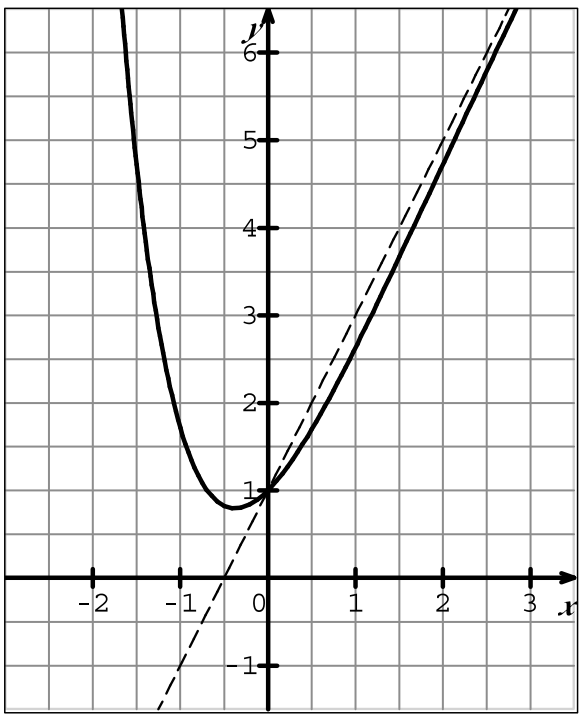
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

11. إثبات أن: $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

لدينا: $h(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{-\alpha}=-\frac{2}{\alpha-1}$ ومنه $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

12. الرسم:



ج) (Δ_β)مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. تعيين βحتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f).

المستقيم $y=2x+\beta$ مماسا للمنحني(C_f) في نقطة منه فاصلتها x_0 يعني $f'(x_0)=2$.

$f'(x_0)=2$ يعني $h(x)=2$ أي $(x-1)e^{-x}=0$ و بالتالي $x_0=1$.

لدينا: $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي: $y=2x+1-e^{-1}$. بالمطابقة نجد $\beta=1-e^{-1}$.

2. المناقشة البيانية:

$-\frac{x}{e^x}+1-\beta=0$ يعني $\beta=-xe^{-x}+1$ و بإضافة $2x$ إلى الطرفين نحصل على:

$2x+\beta=-x\mathrm{e}^{-x}+1+2x$ أي $2x+\beta=f(x)$.

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى(C_f) مع المستقيم(Δ_β).

لدينا هكذا:

إذا كان : $\beta\in\left]-\infty;1-e^{-1}\right[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

إذا كان $\beta=1-e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف.

إذا كان $\beta\in\left]1-e^{-1};1\right[$ للمعادلة حلان.

إذا كان $\beta\geq 1$ ليس للمعادلة حلولا.