الموضوع رقم : 03

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

5. بإتباع خوارزمية إقليدس مثلا نحصل على الجدول الآتي:

الحاصل		1	8
القاسم و المقسوم	3024	2688	336
الباقي		336	0

و هكذا فإن $PGCD(3024;2688)=336$.

6. أ) $2688x+3024y=-3360$ تكافئ $336\times 8x+336\times 9y=336\times(-10)$

و هذا يعني $8x+9y=-10$.

نستنتج هكذا أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان.

ب) لدينا: $8\times(1)+9\times(-2)=8-18=-10$ و منه $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2).

7. لدينا: $(P):x+2y-z=-2$ و $(P'):3x-y+5z=0$.

أ) الشعاع $\vec{n}(1;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و الشعاع $\vec{n'}(3;-1;5)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') .

من الواضح أن الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\vec{n'}=k\vec{n}$.

و عليه فالمستويان (P) و (P') غيرا متوازيين و بالتالي يتقاطعان وفق مستقيم (d) .

ب) إذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (d) فإن: $\begin{cases}x+2y-z=-2\\3x-y+5z=0\end{cases}$. بعد ضرب طرفي المعادلة الأولى في العدد 5 نحصل على: $\begin{cases}5x+10y-5z=-10\\3x-y+5z=0\end{cases}$.

بجع طرف لطرف نحصل على: $8x+9y=-10$.

نستنتج هكذا أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

لنعين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة و التي تحقق المعادلة (2).

لدينا: $\begin{cases}8x+9y=-10\\8\times(1)+9\times(-2)=-10\end{cases}$. بالطرح ينتج: $8(x-1)=9(-y-2)$.

لدينا: 9 يقسم $8(x-1)$ و $PGCD(8;9)=1$ فإن حسب مبرهنة غوص 9 يقسم $(x-1)$.

نستنتج هكذا أن: $x-1=9k$ حيث k عدد صحيح.

بالتعويض نجد: $-y-2=8k$. أي $y+2=-8k$.

نستنتج أن الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة بحيث: $\begin{cases} x = 9k+1 \\ y = -8k-2 \end{cases}$ و k عدد صحيح.

نستنتج هكذا أن (E) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث: $\begin{cases} x = 9k+1 \\ y = -8k-2 \end{cases}$ مع k و z عددان صحيحان.

التمرين الثاني:

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{1}{2}(1+i)z+1$.

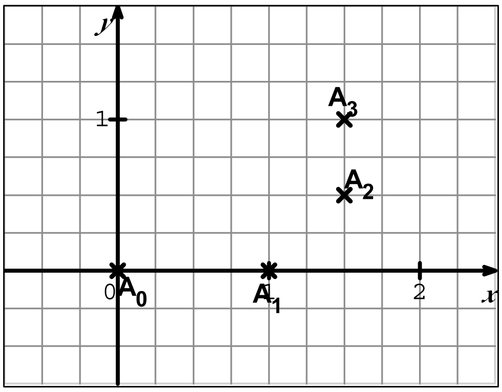
1. العبارة المركبة للتحول النقطي f هي من الشكل $z' = az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب.

لدينا: $a = \frac{1}{2}(1+i)$ و منه $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. نستنتج هكذا أن: $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$.

من جهة ثانية فإن ω لاحقة Ω تحقق: $\omega = \frac{b}{1-a}$ و عليه $\omega = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+i)}$. نجد: $\omega = 1+i$.

2. نسمي A_0 النقطة O و من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $A_{n+1} = f(A_n)$.

أ) إذا رمزنا إلى لاحقة A_n بالرمز z_n يكون لدينا: $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n+1$. و بالتالي:



$z_1 = \frac{1}{2}(1+i)z_0+1$ و منه $z_1 = 1$.

$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)z_1+1$ و منه $z_2 = \frac{1}{2}(3+i)$.

$z_3 = \frac{1}{2}(1+i)z_2+1$ و منه $z_3 = \frac{3}{2}+i$.

ب) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \Omega A_n$.

لدينا: $u_{n+1} = \Omega A_{n+1}$ و بما أن $A_{n+1} = f(A_n)$ فإن $\begin{cases} \Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n \\ \left(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

و منه $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و حده الأول $u_0 = \sqrt{2}$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ و عليه: $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

ج) تنتمي النقط A_n إلى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره $0{,}1$ إذا و فقط كان $\Omega A_n \leq 0{,}1$.

$\Omega A_n \le 0,1$ يعني $u_n \le 0,1$ أي $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le 0,1$ و هذا يعني $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le \frac{0,1}{\sqrt{2}}$.

لدينا: $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$ أي $n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le \ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)$ و منه $n \ge \frac{\ln\left(\frac{0,1}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

نجد بعد الحساب و بالتقريب: $n \ge 7,57$ و منه $n_0 = 8$.

3. أ) المثلث $\Omega A_0 A_1$ قائم في A_1 و متساوي الساقين لأن: $\Omega A_1 = A_0 A_1 = 1$ و $(A_0 A_1) \perp (\Omega A_1)$.

من خواص التشابه المباشر نستنتج أن المثلث $\Omega A_n A_{n+1}$ قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين.

ب) لدينا: $l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + ... + A_{n-1} A_n$.

و منه: $l_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + ... + \Omega A_n$ و عليه: $l_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

و بما أن (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $l_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$.

نجد بعد الحساب: $l_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$.

بما أن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

التمرين الثالث:

أ) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:

$f(x) = e^x - (3x+1)$.

1. $e^x - 3 \ge 0$ يعني $e^x \ge 3$ أي $x \ge \ln 3$ و منه إشارة $e^x - 3$ هي كالآتي:

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$e^x - 3$		$-$	0	$+$	

2. لدينا: $f(0) = 0$ ، $f\left(\frac{5}{4}\right) \simeq -1,26$ و $f(2) \simeq 0,04$.

الدالة f مستمرة على المجال $\left[\frac{5}{4};2\right]$ و $f\left(\frac{5}{4}\right) \times f(2) < 0$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $f(\alpha) = 0$ مع $\frac{5}{4} < \alpha < 2$.

3. تعيين نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-3x-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-3\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$.

4. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=e^x-3$. و منه جدول تغيراتها:

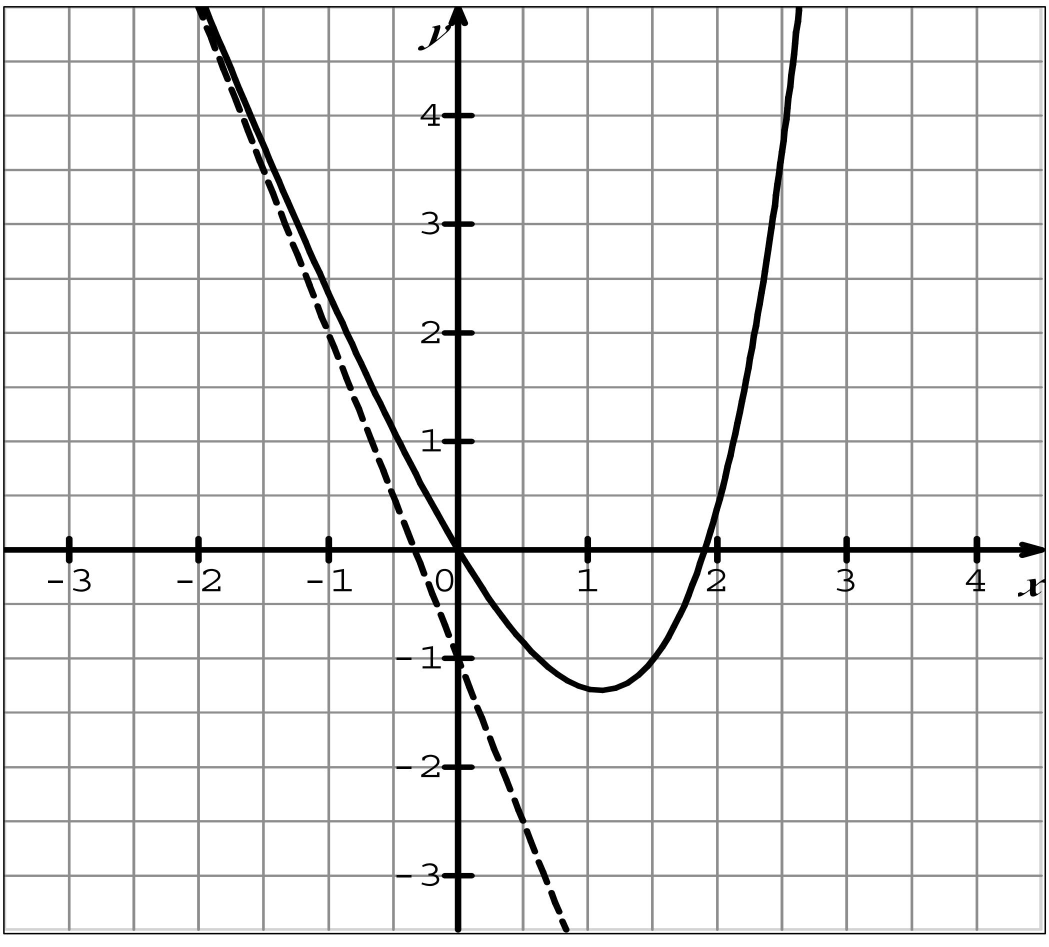
x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2-3\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

5. لدينا: $f(x)-(-3x-1)=e^x$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x-1)\right]=0$.

نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-3x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

و بما أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$ فإن $f(x)-(-3x-1)>0$. نستنتج أن المنحني (C_f) يقع أعلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

6. الرسم:



ب) g الدالة المعرفة كما يأتي:

$$g(x)=e^{x}-\frac{3}{2}x^{2}-x+1 .$$

1. الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x)=e^{x}-3x-1$ و منه $g'(x)=f(x)$.

كما أن: $g(0)=2$. و منه g هي الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $g(0)=2$.

2. يكون المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2$ مماسا للمنحني (C_g) في نقطة فاصلتها β إذا و فقط إذا كان $g'(\beta)=0$ و $g(\beta)=2$.

$g'(x)=0$ يعني $f(x)=0$ و بما أن $g(\beta)=2$ فإن $\beta=0$.

3. لدينا: $g(-1)\simeq 2,22$ و $g\left(-\frac{3}{2}\right)\simeq -2,66$.

الدالة g مستمرة على المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$ و $g\left(-\frac{3}{2}\right)\times g(-1)<0$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$.

4. دراسة تغيرات الدالة g:

* لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

* لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=f(x)$ ومنه فإشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$.

و عليه جدول تغيرات الدالة g هو كالآتي:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. الرسم: