الموضوع رقم : 02

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. بإتباع خوارزمية إقليدس مثلا نحصل على الجدول الآتي:

الحاصل		1	4
القاسم و المقسوم	225	180	45
الباقي		45	0

و هكذا فإن $PGCD(225;180)=45$.

2. لدينا: $225x-180y=90$ ....(1) و بما أن $PGCD(225;180)=45$ فإن المعادلة (1) تكافئ المعادلة $5x-4y=2$ ....(2).

نلاحظ أن الثنائية $(2;2)$ حل خاص للمعادلة (2).

لدينا إذن: $\begin{cases}5x-4y=2\\5(2)-4(2)=2\end{cases}$. بالطرح ينتج: $5(x-2)=4(y-2)$.

لدينا: 4 يقسم $5(x-2)$ و $PGCD(4;5)=1$ فإن حسب مبرهنة غوص 4 يقسم $(x-2)$.

نستنتج هكذا أن: $x-2=4k$ حيث k عدد صحيح.

بالتعويض نجد: $y-2=5k$.

نستنتج أن الحلول هي الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة بحيث: $\begin{cases}x=4k+2\\y=5k+2\end{cases}$ و k عدد صحيح.

3. تعيين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x-y+1|<2$.

$|y-x+1|<2$ يعني $|-k+1|<2$ أي $-2<k-1<2$ ومنه $-1<k<3$.

و هكذا فإن $k\in\{0;1;2\}$ ومنه مجوعة الحلول هي: $S=\{(2;2);(6;7);(10;12)\}$.

4. لدينا: $\begin{cases}a=2+5\alpha\\a=4+4\beta\end{cases}$ و لدينا: $\begin{cases}b=2+5\alpha+2\alpha^2\\a=6+2\beta^2\end{cases}$.

و منه: $\begin{cases}5\alpha-4\beta=2\\2\alpha^2-2\beta^2+5\alpha-4=0\end{cases}$ بدون ما ننسى أن $\alpha>5$ و $\beta>6$.

بما أن $5\alpha-4\beta=2$ لدينا حسب السؤال2: $\begin{cases}\alpha=4k+2\\\beta=5k+2\end{cases}$ و k عدد طبيعي.

و منه و بالتعويض في العلاقة الثانية نحصل على: $2(4k+2)^2-2(5k+2)^2+5(4k+2)-4=0$.

بعد إجراء الحسابات نجد: $3k^2-2k-1=0$ و علما أن k عدد طبيعي فإن $k=1$. ثم بالتعويض نجد: $\alpha=6$ و $\beta=7$.

بالتعويض نجد $a=32$ و $b=104$.

التمرين الثاني:

أ) لدينا النقط: $A(1;0;2)$ ، $B(1;1;4)$ و $C(-1;1;1)$.

1. لدينا $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$.

النقط A ، B و C على استقامة واحدة معناه يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ يعني $\begin{cases}0=-2k\\1=k\\2=-k\end{cases}$ أي $\begin{cases}k=0\\k=1\\k=-2\end{cases}$ و هذا مستحيل.

و بالتالي النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. نبين بكل سهولة أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$. إذن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

3. الشعاع $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و بالتالي فمعادلته هي من الشكل:

$3x+4y-2z=c$. علما مثلا أن النقطة A نقطة منه فان $c=-1$.

ومنه: معادلة المستوي (ABC) هي: $3x+4y-2z+1=0$.

ب) I مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$.

1. لدينا : $I\left(1,\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$ و $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$.

2. الدالة: $t\mapsto\frac{t}{t+3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$ و تأخذ قيمها في المجال $]0;1[$.

بما أن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{t+3}\overrightarrow{IC}$ و $t<\frac{t}{t+3}<1$ فإن G نقطة من القطعة $[IC]$ باستثناء النقطتين I و C.

3. تنطبق النقطة G على منتصف القطعة $[IC]$ إذا و فقط إذا كان $\frac{t}{t+3}=\frac{1}{2}$ أي $t=3$.

التمرين الثالث:

أ) g الدالة العددية المعرفة على كما يلي: $g(x)=x+e^{2(x-1)}$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=1+2e^{2(x-1)}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و منه جدول تغيراتها:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

و بما أن $g\left(-\frac{1}{5}\right)\times g\left(-\frac{1}{10}\right)<0$ فإن $\alpha\in\left[-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right]$.

3. إشارة $g(x)$ هي إذن كالآتي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

ب) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=x^2+e^{2(x-1)}$.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2x+2e^{2(x-1)}=2\left(x+e^{2(x-1)}\right)$.

و هكذا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=2g(x)$.

و بالتالي فإشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

نستنتج مما سبق جدل تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. نعلم أن $g(\alpha)=0$ أي $\alpha+e^{2(\alpha-1)}=0$ و هذا يعني $e^{2(\alpha-1)}=-\alpha$.

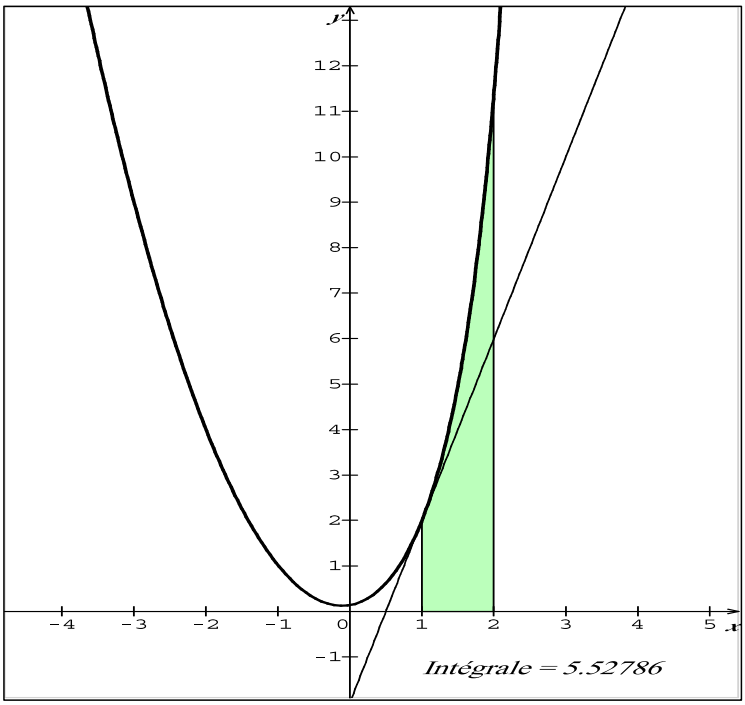
لدينا: $f(\alpha)=\alpha^2+e^{2(\alpha-1)}$ و منه $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha$.

بما أن $-\frac{1}{5}\le\alpha\le-\frac{1}{10}$ و علما أن الدالة: $x\mapsto x^2-x$ متناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right]$ فإن $\left(-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}<f(\alpha)<\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$. نجد بعد الحساب: $\frac{11}{100}<f(\alpha)<\frac{6}{25}$.

3. * لدينا: $f(-1)\simeq1{,}01$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq0{,}29$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)\simeq0{,}61$ و $f(1)=2$.

* معادلة المماس (Δ) هي: $y=4x-2$.

* الرسم:



4. لدينا:

$a=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(x^2+e^{2(x-1)}\right)dx$ و منه $a=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{2(x-1)}\right]_1^2$.

نجد بعد التعويض و التبسيط: $a=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{3}+e^2\right)u.a$.

و هكذا نجد أخيرا و علما أن الوحدة هي $5cm$:

$a=\frac{25}{2}\left(\frac{11}{3}+e^2\right)cm^2$.