تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. دراسة بواقي قسمة 4^n و على 7.

لدينا: $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ و منه $4^{3k} \equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $2^{3k+2} \equiv 2[7]$.

بواقي قسمة 4^n على 7 و التي نرمز إليها بالرمز r هي على النحو الآتي:

إذا كان $n = 3k$ فإن $r = 1$ ، إذا كان $n = 3k+1$ فإن $r = 4$ و إذا كان $n = 3k+2$ فإن $r = 2$.

2. لدينا: $2008 = 3 \times 669 + 1$ و منه $4^{2008} \equiv 4[7]$. نستنتج أن باقي قسمة 4^{2008} على 7 هو 4.

لدينا: $1428 = 3 \times 476$ و منه $4^{1428} \equiv 1[7]$. نستنتج أن باقي قسمة 4^{1428} على 7 هو 1.

3. لدينا: $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 4 + 1 + 16\,[7]$ و منه $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 21\,[7]$

و بما أن $21 \equiv 0\,[7]$ فإن $4^{2008} + 4^{1428} + 16 \equiv 0\,[7]$.

التمرين الثاني:

لدينا: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

نسمي $p(n)$ الخاصية: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

* لدينا: $u_0 = 3$ و منه $u_0 > 0$ بالتالي فإن $p(0)$ صحيحة.

* نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $u_n > 0$.

* لنرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} > 0$.

لدينا: $u_{n+1} = 2u_n + 1$ و بما أن $u_n > 0$ فإن $2u_n + 1 > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ و منه $p(n+1)$ صحيحة.

نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2. من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + 1$.

أ) لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$ و منه $v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$ أي $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$ و بالتالي: $v_{n+1} = 2v_n$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 1$ أي $v_0 = 3$.

ب) نعلم أن: $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 3 \times 2^n$.

و بما أن $v_n = u_n + 1$ فإن $u_n = v_n - 1$ و بالتالي: $u_n = 3 \times 2^n - 1$.

3. لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{10}$ أي $S_n = v_0 \times \dfrac{q^{11} - 1}{q - 1}$ و منه: $S_n = 3 \times \dfrac{2^{11} - 1}{2 - 1}$.

نستنتج هكذا أن $S_n = 3(2^{11} - 1)$.

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ أي $S'_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + ... + (v_{10} - 2)$. و منه:

$S'_n = (v_0 + v_1 + ... + v_{10}) - 11n$ أي $S'_n = 3(2^n - 1) - 2n$.

التمرين الثالث:

لدينا: $u_1 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. حساب الحدود الخمسة الأولى.

* $u_2 = u_1 + 2(1) - 1$ و منه $u_2 = 0 + 2(1) - 1$ إذن $u_2 = 1$.
* $u_3 = u_2 + 2(2) - 1$ و منه $u_3 = 1 + 2(2) - 1$ إذن $u_3 = 4$.
* $u_4 = u_3 + 2(3) - 1$ و منه $u_4 = 4 + 2(3) - 1$ إذن $u_4 = 9$.
* $u_5 = u_4 + 2(4) - 1$ و منه $u_5 = 9 + 2(4) - 1$ إذن $u_5 = 16$.

التخمين: من خلال ملاحظة قيم الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) يمكن أن نخمن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = (n-1)^2$.

2. لنثبت صحة التخمين بالتراجع.

نسمي $p(n)$ الخاصية: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = (n-1)^2$.

* لدينا: $u_1 = 0$ و منه $u_1 = (1-1)^2$ و بالتالي فإن $p(0)$ صحيحة.
* نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ أي: $u_n = (n-1)^2$.
* لنرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1} = n^2$.

لدينا: $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ و بما أن $u_n = (n-1)^2$ فإن $u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1$.

أي $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n - 1$ و منه $u_{n+1} = n^2$.

نستنتج هكذا أن $p(n+1)$ صحيحة.

نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

3. $u_{2008} = 2007^2$ و $u_{1429} = 1428^2$.