الموضوع رقم : 01

تصحيح إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول:

1. لدينا: $3^0 \equiv 1\,[10]$ ، $3^1 \equiv 3\,[10]$ ، $3^2 \equiv 9\,[10]$ ، $3^3 \equiv 7\,[10]$ و $3^4 \equiv 1\,[10]$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$3^{4k} \equiv 1\,[10]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3\,[10]$ ، $3^{4k+2} \equiv 9\,[10]$ و $3^{4k+3} \equiv 7\,[10]$.

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

2. لدينا: $63 \equiv 3\,[10]$ و بما أن $9 \equiv -1\,[10]$ فإن $9^{2001} \equiv -1\,[10]$ و عليه $63 \times 9^{2001} \equiv -3\,[10]$.

نلاحظ أن $7 \equiv -3\,[10]$ و منه $7^{1422} \equiv (-3)^{1422}\,[10]$ أي $7^{1422} \equiv 3^{1422}\,[10]$.

و بما أن $1422 = 4 \times 355 + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9\,[10]$ أي $7^{1422} \equiv 9\,[10]$.

لدينا هكذا $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv -12\,[10]$ أي $63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8\,[10]$.

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8.

3. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}\,[10]$

لدينا:

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3n \times (3^2)^n + (-3)^{2n+1}\,[10]$$
$$\equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1}\,[10]$$
$$\equiv (n-1) \times 3^{2n+1}\,[10]$$

.

4. تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0\,[10]$.

$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0\,[10]$ يعني $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0\,[10]$.

لدينا: $3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$ و بما أن $9 \equiv -1\,[10]$ فإن $9^n \equiv (-1)^n\,[10]$. إذن $3^{2n+1} \equiv 3(-1)^n\,[10]$

لدينا هكذا: $(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 3(-1)^n (n-1)\,[10]$ و عليه:

$(n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0\,[10]$ يعني $3(-1)^n (n-1) \equiv 0\,[10]$.

بما أن $3(-1)^n \equiv 3\,[10]$ أو $3(-1)^n \equiv -3\,[10]$ فإن: $3(-1)^n (n-1) \equiv 0\,[10]$ يعني $n-1 \equiv 0\,[10]$.

يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0\,[10]$ من أجل $n \equiv 1\,[10]$ أي $n = 10\alpha + 1$ مع α عدد طبيعي.

التمرين الثاني:

1. لدينا: $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$

إذن العدد المركب i حل للمعادلة (E).

2. تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

لدينا: $(z-i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ci$.

بالمطابقة ينتج: $\begin{cases} a=1 \\ b-ai=-4-i \\ c-bi=13+4i \\ ci=13i \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$. نستنتج هكذا أنه من أجل كل عدد مركب z:

$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i).(z^2-4z+13)$.

3. استنتاج حلول المعادلة (E):

(E) تكافئ $z=i$ أو $z^2-4z+13=0$

نحل المعادلة : $z^2-4z+13=0$ ... (1).

لدينا: $\Delta=-36=(6i)^2$

حلا المعادلة (1) هما إذن: $2-3i$ و $2+3i$

مجموعة حلول المعادلة(E) هي : $\{i;2-3i;2+3i\}$.

ب) r هو الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

1. عبارته في المستوي المركب هي: $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_B)$ أي: $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z_B$

و منه: $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z+\frac{4+\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$.

لدينا: $z_{A'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i+\frac{4+\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$ و منه: $z_{A'}=2+\left(3-2\sqrt{2}\right)i$.

2. فعلا النقط A'، B و C في استقامية لأن لها نفس الفاصلة 2.

ليكن h التحاكي الذي مركزه B و الذي يحول النقطة C إلى A'. بفرض k نسبة التحاكي h تكون الكتابة المركبة للتحاكي h هي: $z'-z_B=k(z-z_B)$. و بما أن $h(C)=A'$ فإن: $z_{A'}-z_B=k(z_C-z_B)$

و منه: $k=\frac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}$ و بعد إنجاز مختلف الحسابات نحصل على: $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

و منه الكتابة المركبة للتحاكي h هي: $z'=\frac{\sqrt{2}}{3}(z-2-3i)+2+3i$.

<u>التمرين الثالث:</u>

أ) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=\frac{1}{2}\left[x+(1-x)e^{2x}\right]$.

1. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left[1+\frac{e^{2x}}{x}-e^{2x}\right]=-\infty$ و $f(x)=\frac{1}{2}x\left[1+\frac{(1-x)}{x}e^{2x}\right]=-\infty$.

2. لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left[(1-x)e^{2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left[e^{2x}-\frac{2x.e^{2x}}{2}\right]=0$.

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحى C_f بجوار $-\infty$.

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى (Δ) ندرس حسب قيم x إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا: $f(x)-y=\frac{1}{2}(1-x).e^{2x}$ و منه فإشارة $f(x)-y$ من نفس إشارة $1-x$ لأن $e^{2x}>0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		C_f فوق (Δ)		C_f تحت (Δ)	

3. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+e^{2x}-2xe^{2x}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+(1-2x)e^{2x}\right)=-\infty$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $g'(x)=-4xe^{2x}$.

إشارة $g'(x)$ هي إذن عكس إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلولا في المجال $]-\infty;0[$ لأن العدد 0 ليس عنصرا من $]1;2[$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2[$ و $0\in]-\infty;2[$ ،

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

و بالإضافة إلى ذلك لدينا: $g(0,6)\approx 0,33$ و $g(0,7)\approx -0,62$ أي أن $g(0,6)\times g(0,7)<0$.

و هكذا فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,6;0,7]$.

نستنتج هكذا إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

4. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2}\left[1+(1-2x)e^{2x}\right]$ أي $f'(x)=\frac{1}{2}g(x)$.

إذن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$ و عليه جدول تغيرات f هو كالآتي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

بما أن $0,6 \le \alpha \le 0,7$ فإن $\frac{0,6+0,3e^{1,2}}{2} < f(\alpha) < \frac{0,7+0,4e^{1,4}}{2}$

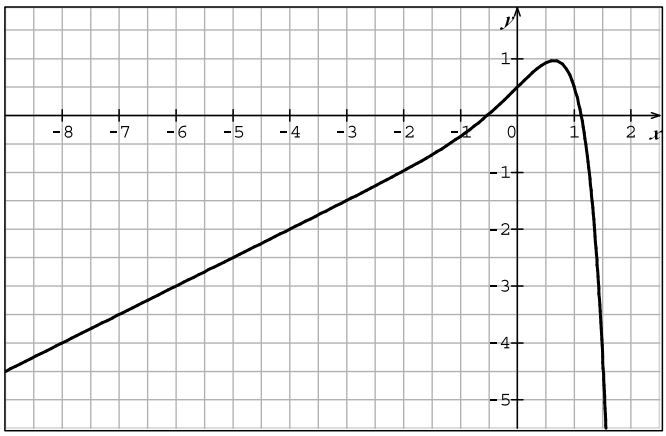
و هكذا نجد أن: $0,79 < f(\alpha) < 1,16$.

5. حساب $f\left(\frac{3}{2}\right)$، $f(-1)$ و $f(1)$ استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;-1]$.

$f(-1) \simeq -0,36$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq -4,27$ ، $f(1) = \frac{1}{2}$.

نستنتج هكذا أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1]$، $f(x) < 0$ لأن $f(x) < f(-1)$ على $]-\infty;-1]$ ما دام الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال.

6. رسم المنحني C_f:



ب) لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ بحيث : $F(1) = \frac{1}{4}$.

1. بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1]$ فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دالة أصلية وحيدة F تحقق $F(1) = \frac{1}{4}$.

2. من أجل كل x من $]-\infty;-1]$، $F'(x) = f(x)$ و بما أن من أجل كل x من $]-\infty;-1]$، $f(x) < 0$ فإن الدالة F متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.