

التمرين الأول (06 نقاط)

- 1 - عين بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5 حسب قيم n الطبيعية.
- 2- عين باقي قسمة العدد 2263 على 5 ثم استنتج باقي قسمة العدد 2263^{2009} على 5
- 3- استنتج أن العدد $4 \times 2263^{2009} + 128$ يقبل القسمة على 5

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) أ- بين صحة المساواة: من أجل كل عدد صحيح $n \neq -1$

$$\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

ب- استنتج قيم n حتى يكون الكسر $\frac{2n+1}{n+1}$ عددا صحيحا.

2) - عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 12

- عين الثنائيات الطبيعية (x, y) التي تحقق المساواة: $x^2 - y^2 = 12$

التمرين الثالث (05 نقاط)

في عملية تشفير نستعمل الحروف المرقمة كما يلي:

	أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y															
التشفير															

	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
X	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
y													
التشفير													

نقوم بعملية التشفير و ذلك باستعمال التحويل $x \rightarrow y$ حيث: $y \equiv 5x + 7 [28]$

- أكمل الجدول السابق

- شفر الجملة " ثانوية جمال الدين "

- فك تشفير الجملة " ش،د،ح،ع،هـ،غ،ت،م،هـ،د،ح،ط،ي،د،ج "

التمرين الرابع (04 نقاط)

- برهن بالتراجع على أن :

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

- استنتج المجموع: $S = 1+3+5+\dots+101$

- انتهى -

حل الموضوع

حل التمرين الأول :

(1) تعيين بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5 حسب قيم n الطبيعية:

$$3^0 \equiv 1[5] , 3^1 \equiv 3[5] , 3^2 \equiv 4[5] , 3^3 \equiv 2[5] , 3^4 \equiv 1[5]$$

ومنه مهما يكن العدد الطبيعي n يكتب على أحد الأشكال : $4k$ أو $4k+1$ أو $4k+2$ أو $4k+3$ حيث k عدد طبيعي.

$$\text{أي أن: } 3^{4k} \equiv 1[5] , 3^{4k+1} \equiv 3[5] , 3^{4k+2} \equiv 4[5] , 3^{4k+3} \equiv 2[5]$$

(2) تعيين باقي قسمة العدد 2263 على 5 ثم استنتاج باقي قسمة العدد 2263^{2009} على 5

$$2263 \equiv 3[5] \text{ ومنه } 2263^{2009} \equiv 3^{2009}[5] \text{ لكن } 3^{2009} \equiv 3^{4 \times 502 + 1}[5] \text{ ومنه } 2263^{2009} \equiv 3[5]$$

إذن باقي قسمة العدد 2263^{2009} على 5 هو 3

(3) استنتاج أن العدد $4 \times 2263^{2009} + 128$ يقبل القسمة على 5 :

$$4 \times 2263^{2009} + 128 \equiv (2+3)[5] \equiv 0[5] \text{ ومنه العدد } 4 \times 2263^{2009} + 128 \text{ يقبل القسمة على 5}$$

حل التمرين الثاني :

(1) أ- بيان صحة المساواة من أجل كل عدد صحيح $n \neq -1$

$$\frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

من أجل كل عدد صحيح $n \neq -1$: $2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$

ب- استنتاج قيم n حتى يكون الكسر $\frac{2n+1}{n+1}$ عدد صحيح:

يكون الكسر $\frac{2n+1}{n+1}$ عددا صحيحا إذا كان $\frac{1}{n+1}$ عدد صحيح أي إذا كان $(n+1)$ يقسم العدد 1

يعني $n+1=1$ أو $n+1=-1$ ومنه $n=0$ أو $n=2$

(2) - تعيين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 12:

$$12 = 2^2 \times 3 \text{ ، } 12 \text{ ، مجموعة القواسم هي } \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

- تعيين كل الثنائيات الطبيعية (x, y) التي تحقق المساواة : $x^2 - y^2 = 12$

$$x^2 - y^2 = 12 \text{ تعني } (x-y)(x+y) = 12$$

بما أن x و y عددين طبيعيين فإن $x+y \geq x-y$

$$x+y=6 \text{ و } x-y=2 \text{ ومنه } x=4 \text{ و } y=2 \text{ والثنائية المطلوبة هي (4;2)}$$

حل التمرين الثالث :

باستعمال التحويل $x \rightarrow y$: $y = 5x + 7[28]$

إذن : $a=5$ و $b=7$

	أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1	20	2	2	23	24	25	26	27
y	7	1	1	2	2	4	9	1	1	2	1	6	11	16	21	26	3	8	13	1	23	0	5	10	15	20	25	2
التشفير	د	ش	ع	ل	ي	ج	ر	ض	ف	ن	ب	خ	س	ظ	ك	و	ث	ذ	ص	غ	م	ا	ح	ز	ط	ق	هـ	ت

تشفير " ثانوية جمال الدين " هو " ل د ط هـ ت ع ي ز د ح د ح ض ت ط "

- فك تشفير الجملة " ش،د،ح،ع،هـ،غ،ت،م،هـ،د،ح،ط،ي،د،ج "

هو " بالتوفيق والنجاح "

حل التمرين الرابع

- برهن بالتراجع على أن :

$$1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2 \quad : \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

$$n_0 = 0 \quad (1)$$

$$P(0) \text{ محققة لأن } 1=1$$

(ب) نفرض أن $P(k)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 0$

$$1+3+5+\dots+(2k+1) = (k+1)^2 \quad : \quad k \geq 0 \text{ أي من أجل كل عدد طبيعي } k$$

ونثبت صحة $P(k+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 0$

$$1+3+5+\dots+(2k+1)+(2k+3) = (k+2)^2 \quad : \quad k \geq 0 \text{ أي أن من أجل كل عدد طبيعي } k$$

$$\text{لدينا : } 1+3+5+\dots+(2k+1)+(2k+3) = (k+1)^2 +$$

$$(k+1)^2 + (2k+3) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$$

ومنه $P(k+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $k \geq 0$

إذن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- استنتج المجموع : $S = 1+3+5+\dots+101$

$$S = 1+3+5+\dots+101 = 1+3+\dots+(2 \times 50 + 1) = (50+1)^2 = (51)^2$$