الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية ميلة　　　　　　　　　　　　متقن علي جعفر - تاجنانت

2007/12/03　　　　《إختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات》

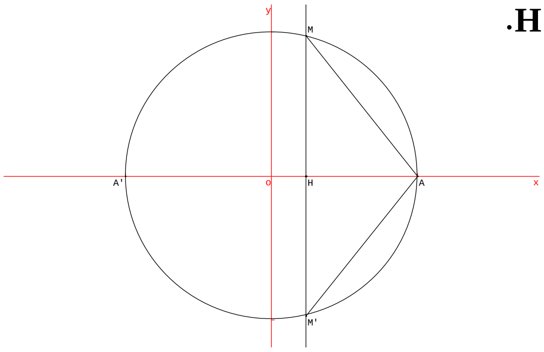
الشعبة: 3 علوم تجريبية　　　　　　　　　　　　**المدة: 3 ساعات**

التمرين الأول:

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ نعتبر الدائرة (C) التي مركزها O و نصف قطرها 1

A , A’ نقطتين بحيث $A(1\,,0)$ و $A'(-1\,,0)$ ،

H نقطة كيفية من القطعة المستقيمة $[AA']$ تختلف عن A و A’ ، من H نرسم المستقيم (Δ) العمودي علـــى $[AA']$ فيقطع الدائرة (C) في نقطتين M , M’ . **نضع x هي فاصلة النقطة H.**



1) أحسب بدلالة x مساحة المثلث AMM' .

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1,1]$ بالشكل:

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

أ-عين الدالة المشتقة للدالة f .

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) عين قيمة x التي من أجلها تكون مساحة المثلث AMM’ أكبر ما يمكن ، المطلوب تحديد هذه المساحة .

المسألة:

I) نعتبر الدالة f_m للمتغير الحقيقي x و الوسيط الحقيقي m المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل :

$$f_m(x) = \frac{3x^2 - mx}{x-3}$$

و ليكن $(\mathcal{C}_m)$ المنحنى البياني الممثل للدالة f_m في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه توجد نقطة ثابتة وحيدة A تنتمي إلى كل المنحنيات $(\mathcal{C}_m)$.

2) ما هي قيم m التي تجعل الدالة f_m تتغير دوما في نفس الاتجاه؟

3) ما هي قيم m التي تجعل الدالة f_m تقبل قيمة حدية محلية عظمى و قيمة حدية محلية صغرى؟

II) نعتبر الدالة g المعرفة بالشكل : $g(x) = f_5(x)$ أي من أجل $m=5$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها البياني في المعلم السابق.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) برهن أنه يوجد نقطتين من المنحني $(\mathcal{C})$ يكون عندهما ميل المماس =2 ، ثم أكتب معادلة أحد المماسين .

3) عين الأعداد الحقيقية : α،β،γ بحيث يكون :

$$g(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-3}$$ مهما يكن $x \in D_g$

4) برهن أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل خطين مقاربين ثم عين نقطة تقاطعهما ω .

5) بين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C})$.

6) أنشئ المنحني $(\mathcal{C})$.

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي λ وجود و إشارة حلول المعادلة: $3x^2 - (2\lambda+5)x + 6\lambda = 0$

8) نعتبر الدالة φ المعرفة بالشكل : $\varphi(x) = \dfrac{3x^2 - 5|x|}{|x| - 3}$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة φ.

ب) أدرس قابلية الاشتقاق للدالة φ عند $x_0=0$.

ج) أدرس شفعية (زوجية أو فردية) الدالة φ.

د) برهن أن $\varphi(x)=g(x)$ على مجال I يطلب تعيينه ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة φ.

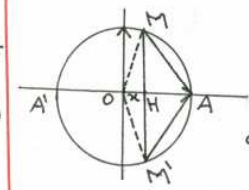
الأستاذ: يوسفي ك	الصفحة 2/2 إنتهى	بالتوفيق

الأستاذ: يوسفي ك   الصف: 3ع تج

تصحيح اختبار الثلاثي الأول

التمرين الأول

نفرض أن S هي مساحة المثلث AMM'



$S=\frac{MM'\cdot HA}{2}$.

حساب MM': $MM'=2HM'$

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم OHM' نجد $OM'^2=OH^2+HM'^2$.

ومنه $HM'^2=OM'^2-OH^2$

$=1^2-x^2$.

ومنه $HM'=\sqrt{1-x^2}$

و $AH=1-x$

ومنه $S(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}\,(1-x)}{2}$

ومنه $S(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$. (2)

/1 الدالة f معرفة على $[-1,1]$ بالشكل

$f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$

/1 الدالة المشتقة:

$f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (1)

إشارة $f'(x)$: (0,5)

x	-1		$-1/2$		1
$f'(x)$	||	+	0	−	||

جدول تغيرات f: (1)

x	-1		$-1/2$		1
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt3}{4}$	↘	0

قيمة x التي من أجلها تكون مساحة المثلث AMM'، $S(x)$ أكبر ما يمكن هي $x=-\frac{1}{2}$ (1) وقيمة هذه المساحة هي $3\sqrt3/4$ م² (0,5)

الدالة f_m معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل

$f_m(x)=\frac{3x^2-mx}{x-3}$.

1) برهان أن كل المنحنيات (C_m) تمر بنقطة ثابتة A.

لدينا معادلة C_m هي:

$y=\frac{3x^2-mx}{x-3}$

ومنه $xy-3y=3x^2-mx$

ومنه $xy-3y-3x^2+mx=0$

تكون هذه المعادلة محققة مهما يكن $m\in\mathbb{R}$ إذا: (0,5)

$\begin{cases}xy-3y-3x^2=0\\ x=0\end{cases}$

معناه $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

ومنه جميع المنحنيات تمر بـ $O(0,0)$.

2) قيم m التي تجعل f_m تتغير في نفس الاتجاه

لدينا: $f'_m(x)=\frac{3(x^2-6x+m)}{(x-3)^2}$ (1)

إشارة المشتق هي من إشارة x^2-6x+m

- الدالة تتغير في نفس الاتجاه معناه $\Delta\leq0$

$\Delta\leq0$ معناه $36-4m\leq0$.

ومنه $m\geq9$

ومنه $m\in[9,+\infty[$ (0,5)

- الدالة تقبل قيمة حدية محلية عظمى وقيمة حدية محلية صغرى معناه $\Delta>0$

أي $36-4m>0$ أي $m<9$

ومنه $m\in]-\infty,9[$ (0,5)

II] $g(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}$.

دراسة تغيرات g:

لدينا $D_g=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (0,5)

$\lim_{x\to 3^{<}}g(x)=\frac{12}{0^-}=-\infty$ (0,5)

$\lim_{x\to 3^{>}}g(x)=\frac{12}{0^+}=+\infty$

المشتق: $g'(x)=\frac{3(x^2-6x+5)}{(x-3)^2}$ (1)

إشارة المشتق: (0,5)

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	

جدول التغيرات: (0,5)

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	||	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	25	↗	$+\infty$

برهان وجود مماسين يكون عندهما ميل المماس $=2$.

نضع $g'(x)=2$ ومنه

$\frac{3(x^2-6x+5)}{(x-3)^2}=2$

ومنه $x^2-6x-3=0$.

$\Delta=48,\quad \sqrt\Delta=4\sqrt3$ (1)

المعادلة تقبل حلين

$x_1=3+2\sqrt3,\quad x_2=3-2\sqrt3$

ومنه توجد نقطتين من (C) يكون عند هما ميل المماس $=2$ فاصلتاهما x_1, x_2

معادلة أحد المماسين:

$(\Delta_1): y=2x+7+4\sqrt3$ (0,5)

في النقطة $M_1(3+2\sqrt3,\ 13+8\sqrt3)$

3) تعيين الأعداد α، β، γ بحيث

$g(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-3}$

بتوحيد المقامات نجد:

$g(x)=\frac{\alpha x^2+(\beta-3\alpha)x+\gamma-3\beta}{x-3}$.

بالمطابقة نجد:

$\begin{cases}\alpha=3\\ \beta-3\alpha=-5\\ \gamma-3\beta=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=4\\ \gamma=12\end{cases}$

ومنه (1) $g(x)=3x+4+\frac{12}{x-3}$

4) لدينا: $g(x)=3x+4+\frac{12}{x-3}$

و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12}{x-3}=0$ (0,5)

ومنه فالمنحني (C) يقبل خط مقارب مائل معادلته $y=3x+4$ في جوار $\pm\infty$.

ولدينا $x=3$ مستقيم مقارب عمودي.

نقطة تقاطعهما $\omega(3,13)$ (0,5)

5) برهان أن النقطة $\omega(3,13)$ هي مركز تناظر لـ (C).

يكفي أن نبرهن أن:

$f(3+h)+f(3-h)=2\cdot13=26$

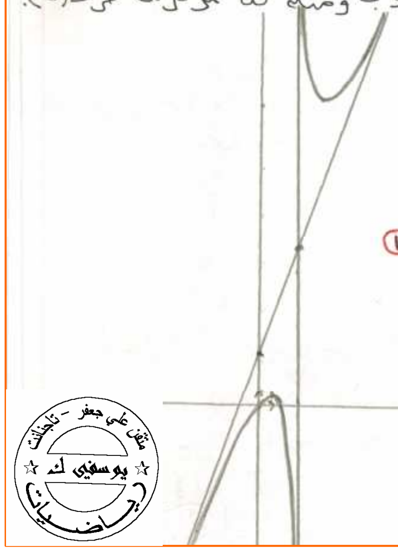
$f(3+h)=\frac{3h^2+13h+12}{h}$

$f(3-h)=\frac{-3h^2+13h-12}{h}$ (1)

$f(3+h)+f(3-h)=\frac{3h^2+13h+12-3h^2+13h-12}{h}$

$=\frac{26h}{h}=26$

وهو المطلوب ومنه ω مركز تناظر لـ (C).



(1)

مناقشة البيانية: 1,5

بيانا المعادلة:

$3x^2-(2\lambda+5)x+6\lambda=0.$

ومنه $3x^2-2\lambda x-5x+6\lambda=0.$

$3x^2-5x=2\lambda x-6\lambda$

$3x^2-5x=2\lambda(x-3).$

$\frac{3x^2-5x}{x-3}=2\lambda.$

$f(x)=2\lambda.$

ومنه حلول هذه المعادلة بيانيا فواصل نقاط تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع المستقيم الأفقي (Δ) الذي معادلته $y=2\lambda$

المناقشة.

* - إذا كان $2\lambda<0$ أي $\lambda<0$

المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

- إذا كان $2\lambda=0$ أي $\lambda=0$

المعادلة تقبل حلين احدهما معدوم والآخر موجب

- إذا كان $1<2\lambda<25$ أي $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{25}{2}$.

المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $0<2\lambda<1$ أي $0<\lambda<1/2$

المعادلة تقبل حلين موجبين.

- إذا كان $2\lambda=1$ أي $\lambda=1/2$.

المعادلة تقبل حلا مضاعفا قيمته 1.

- إذا كان $2\lambda=25$ أي $\lambda=\frac{25}{2}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا قيمته 5.

- إذا كان $2\lambda>25$ أي $\lambda>\frac{25}{2}$

المعادلة تقبل حلين موجبين.

8 نعتبر الدالة φ:

$\varphi(x)=\frac{x^2-5|x|}{|x|-3}.$

أ- $D_\varphi=\mathbb{R}-\{-3,3\}.$ 0,5

ب- قابلية الاشتقاق للدالة φ عند 0

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-5x}{x-3} & x\in[0,3[\cup]3,+\infty[\\ \frac{3x^2+5x}{-x-3} & x\in]-\infty,-3[\cup]-3,0]\end{cases}$$ (*)

قابلية الاشتقاق من اليمين.

$$\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{3h^2-5h}{h-3}}{h}$$

$$=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{\cancel{h}(3h-5)}{\cancel{h}(h-3)}=\frac{5}{3}.$$ 0,5

ومنه φ قابلة للاشتقاق على يمين 0.

2- من اليسار:

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{3h^2+5h}{-h-3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(3h+5)}{\cancel{h}(-h-3)}=\frac{-5}{3}.$$ 0,5

ومنه φ قابلة للاشتقاق على يسار 0.

φ قابلة للاشتقاق على يمين ويسار 0 لكن $\varphi'_d(0)\neq\varphi'_g(0)$ ومنه φ غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ج- مهما يكن $x\in D_\varphi$.

$$\varphi(-x)=\frac{3(-x)^2-5|-x|}{|-x|-3}$$

$$=\frac{3x^2-5|x|}{|x|-3}$$ 0,5

$$=\varphi(x).$$

ومنه φ هي دالة زوجية.

د/ من (*) $\varphi(x)=g(x)$ على المجال

$I=[0,3[\cup]3,+\infty[$ 0,5

- ومنه منحنى الدالة φ يكون منطبقا على $\mathcal{C}$ في المجال I أما في المجال $]-\infty,-3[\cup]-3,0]$ فنرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب