

التمرين الأول : (07 نقاط)

نعتبر المعادلتين التفاضليتين :

$$(E_1) : y' = 2y \quad \text{و} \quad (E_2) : y' = y$$

1. أ) حل المعادلتين : $(E_1), (E_2)$

ب) عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث : $f_1'(0) = 1$

ج) عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث : $f_2'(0) = 2$

2. لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{2x} - 2e^x$

(C) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

أ) أدرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$

ب) استنتج وجود مستقيم مقارب (d) يطلب تعيين معادلة له.

ت) أحسب $g'(x)$

ث) أدرس إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات g

ج) أثبت أن المنحنى (C) الممثل للدالة g يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

حيث : $0.6 < \alpha < 0.7$

د) أنشئ المنحنى (C) الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

التمرين الثاني : (07 نقاط)

أربع نقط من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد $D(0; 4; -1), C(6; -2; -1), B(6; 1; 5), A(3; -2; 2)$

و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1. بين أن المثلث ABC قائم .

2. جد معادلة ديكارتية للمستوي (DBC) .

3. أثبت أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

4. استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

5. أثبت أن قياس الزاوية \widehat{BDC} هو $\frac{\pi}{4}$ راديان.

6. أحسب بعد النقطة A عن (BDC) .

7. نعتبر المستويين $(P_1), (P_2)$ حيث : $(P_1) : x + y + z - 3 = 0$ و

$$(P_2) : x - z - 1 = 0$$

• أثبت أن $(P_2), (P_1)$ يتقاطعان في مستقيم (Δ) .

- أثبت أن النقطة A تنتمي إلى (Δ) .
- أثبت أن الشعاع $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) .
- استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) .

التمرين الثالث : 06 نقاط

C, B, A ثلاث نقط من الفضاء

1. أنشء G مرجح الجملة $\{(B;-1),(C;2)\}$

و F مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;2),(C;-4)\}$

2. بين أن F مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تحديدهما

3. عين (Γ_1) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\|\overline{MA} + \overline{MG}\| = 2\|\overline{MC} - \overline{MB}\|$$

4. عين (Γ_2) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$MA^2 + MG^2 = 1$$

5. عين (Γ_3) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$$(\overline{MA} + \overline{MG}) \cdot (\overline{MF} - \overline{MG}) = 0$$

- انتهى -

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول :

(أ) حل المعادلتين : $(E_1), (E_2)$

المعادلة $(E_1): y' = 2y$ حلوها $y = c_1 e^{2x}$ حيث $c_1 \in \mathbb{R}$

المعادلة : $(E_2): y' = y$ حلوها $y = c_2 e^x$ حيث $c_2 \in \mathbb{R}$.

(ب) تعيين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث : $f_1'(0) = 1$

$f_1'(0) = 1$ معناه : $c_1 = \frac{1}{2}$ ومنه الحل الخاص هو : $f_1(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$.

(ج) تعيين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث : $f_2'(0) = 2$

$f_2'(0) = 2$ معناه : $c_2 = 2$ ومنه الحل الخاص : $f_2(x) = 2e^x$.

2. الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{2x} - 2e^x$

(النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$)

(أ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ ومنه : $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$

(ت) حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و : $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$

(ث) إشارة $g'(x)$ مثل إشارة : $e^x - 1$ من أجل كل عدد حقيقي x

ومنه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		0	$+\infty$

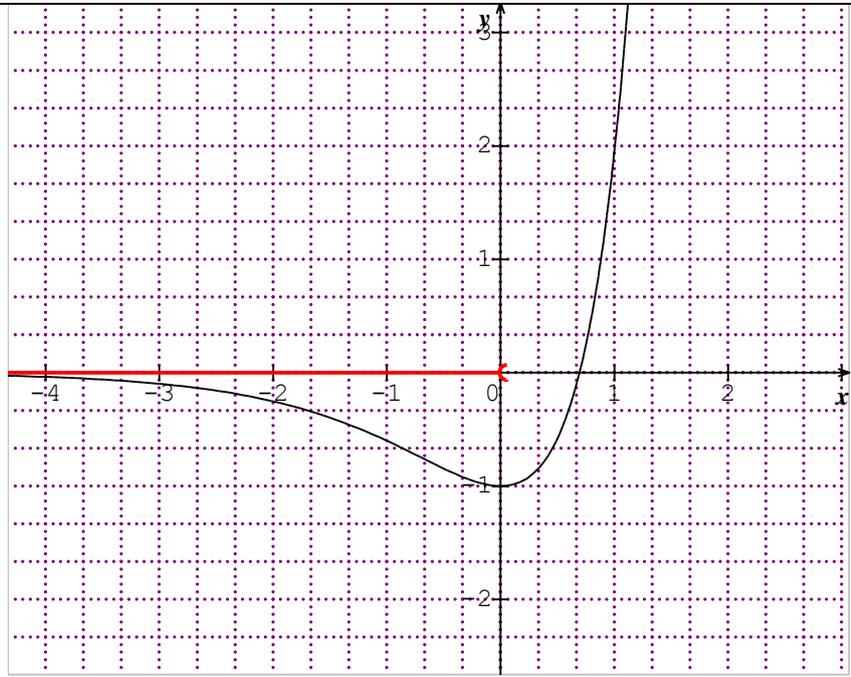
(ج) الدالة g معرفة و مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة على $[0.6; 0.7]$

و رتيبة تماما على $[0.6; 0.7]$ و $g(0.6)g(0.7) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in [0.6; 0.7]$ حيث : $g(\alpha) = 0$

معناه : المنحنى الممثل للدالة يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

(د) إنشاء المنحنى (C).



حل التمرين الثاني :

1. تبين أن المثلث ABC قائم:

$$\overline{AB}(3;3;3) , \overline{AC}(3;0;3)$$

$\overline{AB} \perp \overline{AC} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم A

2. إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (DBC) .

$$\overline{DB}(6;-3;6) , \overline{DC}(6;-6;0)$$

الشعاعان \overline{DB} و \overline{DC} غير مرتبطين خطيا $(1 \neq \frac{1}{2})$

ليكن $\overline{n}(a;b;c)$ الشعاع الناطمي للمستوي (DBC) $\overline{n} \cdot \overline{AM} = 0$

$$\begin{cases} 6a - 3b + 6c = 0 \\ 6a - 6b = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \overline{n} \perp \overline{DB} \\ \overline{n} \perp \overline{DC} \end{cases}$$

$$\text{ومنّه } \overline{n}(2;2;-1)$$

معادلة (DBC) من الشكل : $2x + 2y - z + d = 0$ حيث عدد حقيقي d

بما أن (DBC) يشمل النقطة D فإن $8 + 1 + d = 0$

$$\text{ومنّه } d = 9$$

إذن $2x + 2y - z - 9 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (BDC) .

3. أثبات أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

$\overline{AD} \perp \overline{AB} = 0, \overline{AD} \perp \overline{AC} = 0$ ومنه (AD) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (AB) و (AC)

فهو عمودي على المستوي (ABC) .

4. استنتاج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$$V = \frac{1}{3} d(A; (BDC)) \cdot A_{BDC}, A_{BDC} = 27 \text{ وحدة حجم}$$

5. إثبات أن قياس الزاوية \widehat{BDC} هو $\frac{\pi}{4}$ راديان.

$$\text{ومنّه قياس الزاوية } \widehat{BDC} \text{ هو } \frac{\pi}{4} \text{ راديان. } \cos(\widehat{DB}; \widehat{DC}) = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}{\|\overline{DB}\| \cdot \|\overline{DC}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. حساب بعد النقطة A عن (BDC)

$$.d(A;(BDC)) = \frac{|9|}{\sqrt{4+4+1}} = 3$$

.7

6. أثبت أن $(P_2), (P_1)$ يتقاطعان في مستقيم (Δ)

$\overline{n_{p_2}}(1;0;-1)$ و $\overline{n_{p_1}}(1;1;1)$ غير مرتبطين خطيا ومنه : المستويان $(P_2), (P_1)$ يتقاطعان في مستقيم (Δ) .

7. $A \in (P_1): 3-2+2-3=0$ و $A \in (P_2): 3-2-1=0$ ومنه $A \in (\Delta)$

8. شعاع توجيه المستقيم لأن : $\overline{u}(1;-2;1)$ و $\overline{n_{p_2}}\overline{u} = 0$ و $\overline{n_{p_1}}\overline{u} = 0$

9. التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2-2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$

حل التمرين الثالث :

1. مرجح الجملة : $\{(B;-1), (C;2)\}$ معناه $\overline{BG} = 2\overline{BC}$

F مرجح $\{(A;-2), (B;2), (C;2)\}$ معناه : $\overline{AF} = 0.5\overline{BA} + \overline{AC}$

الإنشاء .

2. F هي منتصف [AG]

3. (Γ_1) هي مستو محور [FG].

4. إذا كان $FG^2 = 0.5$ فإن $(\Gamma_2) = \{G\}$.

إذا كان : $FG^2 < 0.5$ فإن (Γ_2) هي سطح كرة مركزها F و $r = \sqrt{\frac{1-2FG^2}{2}}$

إذا كان : $FG^2 > 0.5$ فإن (Γ_2) هي المجموعة الخالية .

5. (Γ_3) هي مستو شعاعه الناظمي \overline{GF} .