ثانوية الشهيد حفيان محمد العيد – كوينين –	السنة الدراسية: 2010/2009

الاختبار الأول في مادة الرياضيات

السنة الثالثة علوم تجريبية — المدة : 2 ساعات

• التمرين الأول :

نعتبر كثير الحدود التالي : $f(x)=2x^3-(1+2e)x^2+(e-1)x+e$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-f(1)=(x-1)(ax^2+bx+c)$
ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$:

أ) المعادلة $2e^{3x}-(1+2e)e^{2x}+(e-1)e^x+e=0$

ب) المتراجحة $2e^{2x}+e\times e^{-x}\geq(1+2e)e^x-(e-1)$

• التمرين الثاني :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x+1$.

1) احسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2\,;\,2.2]$ ثم استنتج أن $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x+x}{e^x+1}\right)$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{1}{2(e^x+1)^2}g(x)$.

2) عين نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

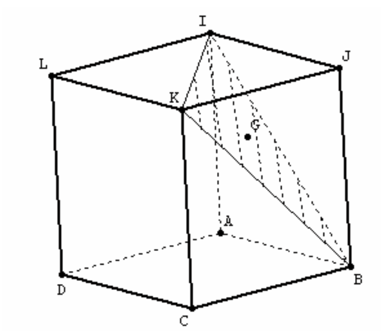
3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-\dfrac{1}{2}x=(1-x)e^x\times\dfrac{1}{2(e^x+1)}$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.

4) أ) عين معادلة المماس T للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha-1}{2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

جـ) أرسم T و (C).

• التمرين الثالث :



نعتبر المكعب $ABCDIJKL$ ، ينسب الفضاء إلى المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$

1) ليكن G مركز ثقل المثلث IBK . احسب إحداثيات G .

2) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (JD) ثم تحقق أن G تنتمي إلى هذا المستقيم .

3) بين أن $\overrightarrow{JD}$ يعامد كل من الشعاعين $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BI}$.

استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BIK) .

انتهى

• التمرين الأول:

نعتبر كثير الحدود التالي :

$$f(x)=2x^3-(1+2e)x^2+(e-1)x+e$$

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c.

$f(1)=0$ ومنه $f(x)-f(1)=f(x)$ أي

$$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$$

معاملات $f(x)$	2	$-(1+2e)$	$(e-1)$	e
قيمة $\alpha=1$	↓	$+\ \alpha\times a=1\times 2$	$+\ \alpha\times b=1-2e$	$+\ \alpha\times c=-e$
معاملات هورنر	2	$=\ 1-2e$	$=\ -e$	$=\ 0$
	a	b	c	$f(1)$

إذن: $f(x)=(x-1)\left[2x^2+(1-2e)x-e\right]$

2) أ) حل المعادلة

$$(1)\ldots\ldots\ 2e^{3x}-(1+2e)e^{2x}+(e-1)e^x+e=0$$

(1) تكافئ $f(e^x)=0$ أي

$(e^x-1)\left[2e^{2x}+(1-2e)e^x-e\right]=0$ ومنه

$(e^x-1)=0$ أو $(2)..\ 2e^{2x}+(1-2e)e^x-e=0$

(2) يكافئ $\begin{cases}X=e^x\\ 2X^2+(1-2e)X-e=0\end{cases}$

بعد الحساب نستنتج أن $e^x=1$ أو $e^x=e$ أو $e^x=-\dfrac{1}{2}$

إذن : $x\in\{0;1\}$

ب) حل المتراجحة

$$(3)\ldots\ldots\ \ 2e^{2x}+e\times e^{-x}\geq(1+2e)e^x-(e-1)$$

(3) تكافئ $f(e^x)\geq 0$ أي

$$(e^x-1)(e^x-e)(2e^x+1)\geq 0$$

وهذا يكافئ $(e^x-1)(e^x-e)\geq 0$ لأن $(2e^x+1)>0$

إذن: $x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

• التمرين الثاني:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x+1$.

1) حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x-xe^x+1)=1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x+1=-\infty$

2) g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=(1-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ تتبع إشارة $(1-x)$ ومنه جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1+e$	↘ $-\infty$

3) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2\,;\,2.2]$ فعلا لأن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2\,;\,2.2]$ و $g(2).g(2.2)=-0.8<0$

وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة .

• بما أن $g(\alpha)=0$ فإن $(2-\alpha)e^{\alpha}+1=0$

ومنه $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$.

4) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x+x}{e^x+1}\right)$

1) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^x+1)^2-e^x(e^x+x)}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-xe^x+2e^x+1}{(e^x+)^2}\right)$$

وعليه $f'(x)=\dfrac{1}{2(e^x+1)^2}g(x)$

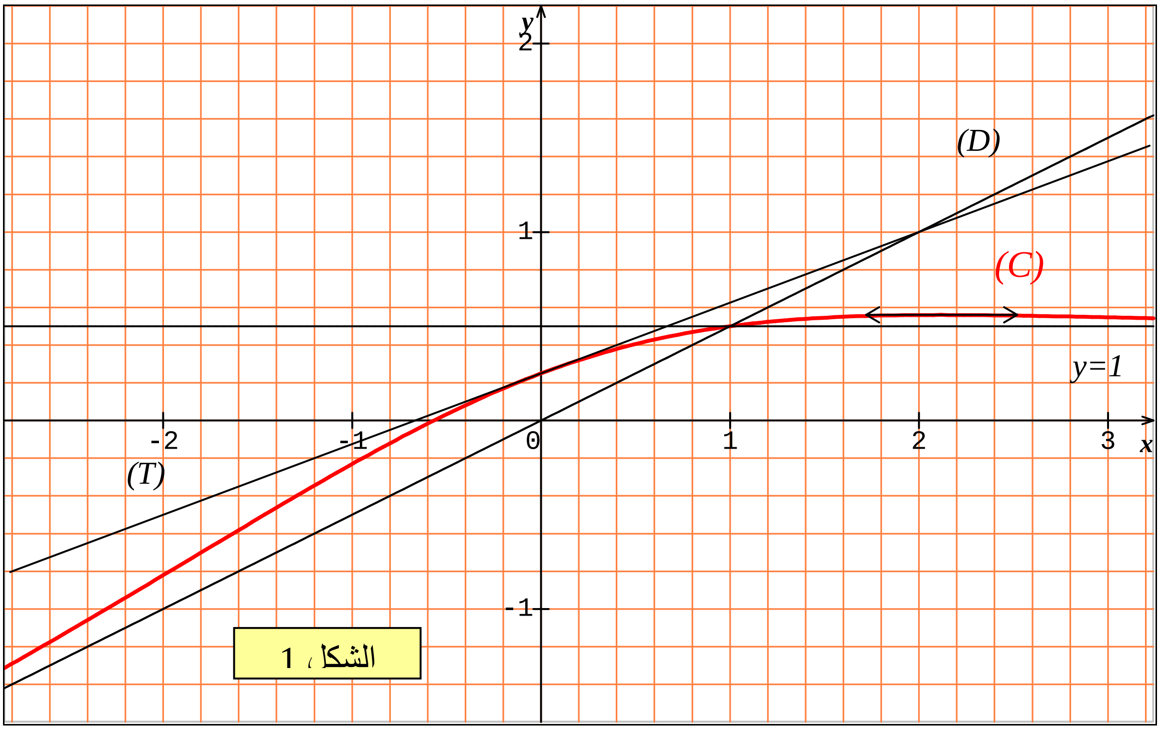
نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

2)

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\right)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x}{e^x}\left(\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1+\dfrac{1}{e^x}}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\ ،\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\right)$



جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow f(\alpha) \searrow \frac{1}{2}$

3) $f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\frac{e^x+x-xe^x-x}{(e^x+1)}$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)-\frac{1}{2}x=(1-x)e^x\times\frac{1}{2(e^x+1)}$$

ومنه نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$

مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

لأن :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((e^x-xe^x)\times\frac{1}{2(e^x+1)}\right)=0$$

4) أ) معادلة المماس T للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)x+f(0)$ بما أن $f'(0)=\frac{3}{8}$ و $f(0)=\frac{1}{4}$ فإن

$y=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}$.

ب) • لدينا $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-2}$ و $f(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^\alpha+\alpha}{e^\alpha+1}\right)$

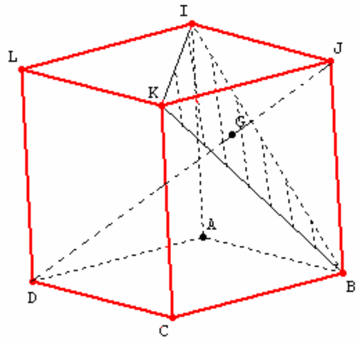
وبعد التعويض نحصل على : $f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{2}$

• بما أن $2<\alpha<2.2$ فإن $1<\alpha-1<1.2$

وأخيرا : $0.5<f(\alpha)<0.6$

جـ) الشكل 1

• التمرين الثالث:



$ABCDIJKL$ مكعب و $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$ معلم للفضاء .

1) لدينا : $B(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ ، $I(0\ ;\ 0\ ;1)$ و $K(1\ ;\ 1\ ;1)$

ومنه $G(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3})$

(G مرجح الجملة $\{(B,1);(I,1);(K,1)\}$)

2) • $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(JD)$ يكافئ $\overrightarrow{JM}=t\overrightarrow{JD}$ ($t\in\mathbb{R}$)

لدينا $D(0\ ;1\ ;\ 0)$ و $J(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ ومنه

$\overrightarrow{JD}(-1;1;-1)$ و $\overrightarrow{JM}(x-1;y;z-1)$

$M\in(JD)$ يكافئ $\begin{cases} x-1=-t \\ y=t \\ z-1=-t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$

• $G\in(JD)$ يكافئ (يوجد عدد حقيقي t حيث $\begin{cases} \frac{2}{3}=-t+1 \\ \frac{1}{3}=t \\ \frac{1}{3}=-t+1 \end{cases}$)

هذه الجملة تقبل حلا واحدا $t=\frac{1}{3}$

إذن : G تنتمي إلى المستقيم (JD).

(يمكن أن نلاحظ أن $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JD}$ أي $\overrightarrow{GM}\parallel\overrightarrow{JD}$)

3) لدينا $\overrightarrow{BK}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{BI}(-1;0;1)$

• $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{BK}=0$ أي $\overrightarrow{JD}\perp\overrightarrow{BK}$

• $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{BI}=0$ أي $\overrightarrow{JD}\perp\overrightarrow{BI}$

إذن $\overrightarrow{JD}$ يعامد كل من الشعاعين $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BI}$.

• تعيين معادلة للمستوي (BIK).

$M\in(BIK)$ يكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{JD}=0$

أي: $-(x-1)+(1)y+(-1)z=0$

ومنه معادلة المستوي (BIK):

$-x+y-z+1=0$