على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(v_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 4} \end{cases}$

1- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \le v_n \le 4$.

2- أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

ب) هل المتتالية (v_n) متقاربة؟ علل إجابتك.

3- أ) بين أن من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - v_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - v_n)$.

ب) استنتج من اجل كل عدد طبيعي n : $4 - v_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

جـ) أدرس تقارب المتتالية (w_n) المعرفة على N بـ: $w_n = n^2(4 - v_n)$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I) الجدول أدناه هو للدالة g المعرفة على ℝ بـ: $g(x) = ax^3 + bx + c$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

1) أوجد الأعداد a , b , c.

2) بين أن المعادلة $x^3 - 3x - 3 = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]2;\frac{5}{2}\right[$.

3) استنتج ، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على ℝ.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $D = R - \{-1;1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} + 1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$

1) تحقق أنه من كل عدد حقيقي x من $R - \{-1;1\}$، $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

2) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

3) أحسب النهايات عند حدود D.

4) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

5) بين أن : $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)ثم أدرس وضعية (C_f)بالنسبة إلى (Δ).أنشئ (C_f).

7) أ . باستعمال $\mathcal{C}_f$ ، ناقش حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $2x^3+(1-m)x^2+m+2=0$.

ب . استنتج حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة:
$2\cos^3 u+(1-m)\cos^2 u+m+2=0$ مع $u\in[0;2\pi[$

التمرين الثالث: (09 نقاط)

I)نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة g .

2) بين أن: $g(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$(لاحظ أن $g(0)=0$) ثم أستنتج أن: $e^{-x}+x\geq 1$ لكل x من $\mathbb{R}$

II)نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الأطوال 2 cm

1) أ) بين أن : $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.(نقبل أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

2) أ) بين أن: $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C)في النقطة O مبدأ المعلم.

ب) تحقق أن: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس إشارة $x-f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج) أستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

4) أنشئ (Δ)و (C)في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III)نعتبر المتتالية العددية (u_n)المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالتراجع أن : $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2)بين أن المتتالية (u_n) متناقصة (يمكن إستعمال نتيجة السؤال 3II)ب)

3)أستنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) الهندسية حدودها موجبة حيث : $\ln(u_2)-\ln(u_4)=4$ **و** $\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12$

1) **بين أن أساس المتتالية** (u_n) **هو** $q=\frac{1}{e^2}$ **ثم عين حدها الأول** u_0.

2) **احسب** u_n **بدلالة** n.

3) **أ-احسب المجموع** $S_n=u_0+u_1+u_2+..............+u_n$

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4) **لتكن المتتالية** (v_n) **المعرفة من اجل كل عدد طبيعي** n **بـ :** $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أ- بين أن (v_n) **متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.**

ب- احسب المجموع T_n **حيث:** $T_n=v_0+v_1+v_2+...............+v_n$

حـ - عين قيمة n **حتى يكون** $T_n{}^2=2^{30}$

التمرين الثاني:(06 نقاط)

I- f **دالة عددية معرفة على** $\mathbb{R}$ **كمايلي :** $f(x)=e^{x+1}-x-3$

(C) **بيان للدالة** f **في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس** $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. **احسب نهايات الدالة** f **عند** $-\infty$ ، $+\infty$. **(نقبل أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ **)واستنتج أن** (C) **يقبل مستقيم مقارب عند** $-\infty$ **،نرمز له بـ**(Δ).
2. **ادرس تغيرات الدالة** f.
3. **احسب:**$f(-3)$،$f(-\frac{5}{2})$،$f(0)$،$f\left(\frac{1}{2}\right)$ **ثم استنتج أن المعادلة** $e^{x+1}=x+3$ **تقبل حلين.**

   α **و** β $(\beta\prec 0)$ **يطلب تعيين حصرا للعددين** α **و** β .
4. **جد معادلة لمماس المنحني** (C) **عند النقطة ذات الفاصلة** 0 **، نرمز له بـ** (D)
5. **أنشئ** (Δ) ، (D) **و** (C).
6. h **دالة عددية معرفة على** $\mathbb{R}$ **كمايلي:** $h(x)=e^{-x+1}+x-3$

   - أنشئ منحني الدالة h **انطلاقا من المنحني** (C).

II- g **دالة عددية ،** m **وسيط حقيقي حيث :** $g(x)=e^{x+1}-\frac{1}{2}x^2-(m+3)x$

(Γ) **التمثيل البياني للدالة g في المستوي السابق .**

- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m **عدد مماسات المنحنى** (Γ) **الموازية لحامل محور الفواصل.**

التمرين الثالث :(09 نقاط)

I) **نعتبر الدالة** f **المعرفة علي** $I=]0;+\infty[$ **بـ :** $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$

و ليكن (C) **تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$.
وحدة الأطوال $4\ \text{cm}$ **و ليكن** (d) **المستقيم ذو المعادلة :** $y=x$

1) **احسب نهاية** f **عند 0 ، فسر بيانيا النتيجة.**

2) **احسب نهاية** f **عند** $+\infty$ **واستنتج أن** (C) **يقبل مستقيما مقاربا مائلا** (Δ) **معادلته** $y=\frac{1}{2}x$.

3) **ادرس تغيرات** f **ثم شكل جدول تغيراتها.**

4) **أرسم** (Δ) **والمنحنى** (C).

5) **عين إحداثيتي نقطة تقاطع** (C) **و** (d).

II)**نعتبر المتتالية** (u_n) **المعرفة من أجل كل عدد طبيعي** n **كما يلي:**

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n}) \end{cases}$$

1) **أنشئ النقط** $A_0\ ;\ A_1\ ;\ A_2$ **ذات الفواصل** $u_0\ ;\ u_1\ ;\ u_2$ **علي الترتب .**

2)**باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنه من أجل كل طبيعي** n **:** $u_n\geq\sqrt{2}$.

3) **بين أن المتتالية** (u_n) **متناقصة تماما.ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب** (u_n)**؟**

4) **تحقق أن:** $u_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}}$.

5)**باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنه من أجل كل طبيعي** n **:** $u_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{2^n-1}}$

- **استنتج نهاية المتتالية** (u_n).

بالتوفيق...... *الأستاذة سكيوى*