بكالوريات وطنية محلولة
إعداد الأستاذ بواب نورالدين

تمرين محلول 1 : بكالوريا 2009 علوم تجريبية (الموضوع الثاني) :

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$

❶ احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

❷ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

❸ احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

لتكن f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ أ- احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

هـ- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

❷ بيّن أنه ، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل

جدول تغيّرات الدالة f .

❸ بيّن أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4 .

❹ ارسم المنحنى (C_f) .

❺ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

الحل :

الجزء الأول :

❶ حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$:

تذكير : $\lim\limits_{u \overset{>}{\to} 0} \ln u = -\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \ln(x+1) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x) = -\infty$

• حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، لدينا :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)=(x+1)\left[\frac{x^2+2x}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$

تذكير : $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\ln u}{u}=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

❷ تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)'=2x+2+\frac{1}{x+1}$$

$$=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

• استنتاج اتجاه تغيّر الدالة h :

من السؤال السابق نستنتج أنه ، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $h'(x)>0$

إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- جدول تغيّرات الدالة h :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

❸ حساب $h(0)$: $h(0)=0$

- استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

من جدول تغيرات الدالة h و علما أن $h(0)=0$ نستنتج ما يلي :

$h(x)=0$ يكافئ $x=0$

$h(x)>0$ يكافئ $x\in\,]0;+\infty[$

$h(x)<0$ يكافئ $x\in\,]-1;0[$

الجزء الثاني :

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$:

تذكير : $\lim\limits_{u\overset{>}{\to}0}\ln u=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\ln(x+1)=-\infty$ إذن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=-\infty$

- التفسير البياني لهذه النتيجة : المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$

ب- البرهان أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$: لدينا $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$

نضع : $u=e^t$ ومنه : $t=\ln u$ من أجل $u>0$ وبالتالي : $\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{u}{\ln u}$

عندما $t\to+\infty$ فإن $e^t\to+\infty$ أي : $u\to+\infty$ ومنه : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}$

وبوضع $X=\dfrac{u}{\ln u}$ وعلما أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}=0$ نستنتج أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$

جـ- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

د- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(x-1)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

- الاستنتاج : نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-(x-1) = -\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$ هي إشارة $-\ln(x+1)$ ومنه النتائج التالية :

- إذا كان $x = 0$ يكون $f(x)-(x-1) = 0$ ومنه (Δ) يقطع (C_f) في النقطة O
- إذا كان $x \in]0;+\infty[$ يكون $f(x)-(x-1) < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ).
- إذا كان $x \in]-1;0[$ يكون $f(x)-(x-1) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) .

❷ تبيان أنه ، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$:

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ،

$$f'(x) = (x-1)' - \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيّرات الدالة f .

من السؤال السابق نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ ، ومن السؤال ❸ للجزء الأول نستنتج أن :

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$

$f'(x) > 0$ يكافئ $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) < 0$ يكافئ $x \in]-1;0[$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي فإن الدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$ ومتناقصة على $]-1;0]$.

❸ تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4 :

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
- f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
- $f(a)<k<f(b)$.

تحليليا : المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

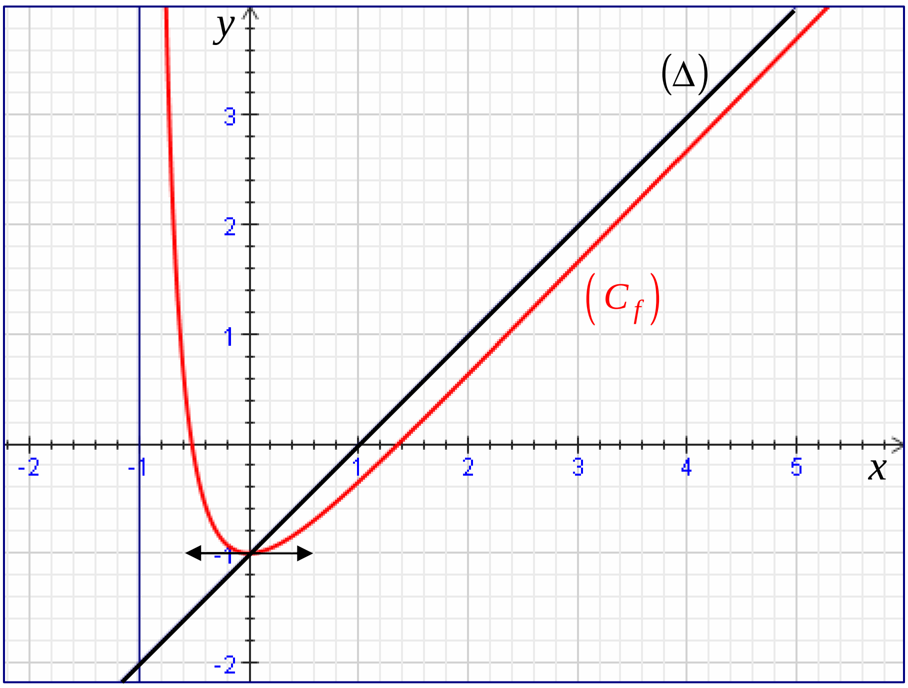
هندسيا : المنحنى الممثل للدالة f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=k$ في نقطة واحدة فاصلتها α من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[3.3\ ;\ 3.4]$

ولدينا : $f(3.3)\approx 1.96$ ، $f(3.4)\approx 2.06$ وبالتالي : $f(3.3)<2<f(3.4)$

إذن : المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4 .

❹ رسم المنحنى (C_f) :



❺ حساب المساحة A :

$$A=\int_0^1[f(x)-(x-1)]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^1$$

إذن : $A=\frac{1}{2}(\ln 2)^2\ u.a$

تمرين محلول 2 : بكالوريا 2009 رياضيات (الموضوع الثاني) :

f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ ادرس تغيّرات الدالة f .

❷ أ- بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) .

❸ أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$.

ب- عيّن معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

❹ أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x .

❺ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=|f(x)|$

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$

الحل :

❶ دراسة تغيّرات الدالة f :

- النهايات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- حساب $f'(x)$: $f'(x)=1+\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$
- إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	-1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

❷ أ- تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته $y=x$:

- بما أن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=-\infty$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f).
- تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و هي من الشكل $f(x)=ax+b+\varphi(x)$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x+1}}=0$ نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) :

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x)-x=-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ هي إشارة $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$. وبما أنه ، من أجل كل x من المجال

$]-1;+\infty[$ ، $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}<0$ نستنتج أن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (D).

❸ أ- تبيان أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $1.3<x_0<1.4$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
- f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
- $f(a)\times f(b)<0$.

تحليليا : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $]a;b[$.

هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.3;1.4]$ ، زيادة على ذلك : $f(1.3)=-0.01$ و $f(1.4)=0.10$ وبالتالي : $f(1.3)\times f(1.4)<0$. نستنتج أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3<x_0<1.4$.

ب- تعيين معادلة (Δ) مماس للمنحني (C_f) عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

- تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع محور التراتيب :

من أجل : $x=0$: نجد : $f(0)=-2$ وبالتالي (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $B(0;-2)$.

- كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة B :

معادلة (Δ) من الشكل : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$ حيث :

$f(a)=f(0)=-2$ وَ $f'(a)=f'(0)=2$ ومنه : $y=2(x-0)-2$.

إذن : معادلة المماس (Δ) هي $y=2x-2$.

جـ- رسم (Δ) و (C_f) : انظر الشكل .

❹ إيجاد F الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغيّر x :

تذكير : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I وكان ، من أجل كل x من I

$u(x)>0$ تكون $2\sqrt{u}+c$ $(c\in\mathbb{R})$ دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ على I .

لدينا : $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $I=]-1;+\infty[$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ وبالتالي فهي تقبل دوالا أصلية على هذا المجال
الدالة $u:x\mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال : $u'(x)=1$ ، يمكن أن نكتب : $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ على الشكل $-2\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

ونعلم أن $2\sqrt{u}$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

إذن : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي الدوال :

$F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\times2\sqrt{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي .

ونعلم أن $F(0)=0$ ومنه : $c=4$.

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-4\sqrt{x+1}+4$

❺ تبيان كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) :

تذكير : $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)\leq 0 \end{cases}$

ومنه : $g(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in[x_0;+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-1;x_0] \end{cases}$

- إذا كان $x\in[x_0;+\infty[$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : (C_g) ينطبق على (C_f) .
- إذا كان $x\in]-1;x_0]$ فإن $g(x)=-f(x)$ ومنه : (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

• رسم (C_g) : انظر الشكل

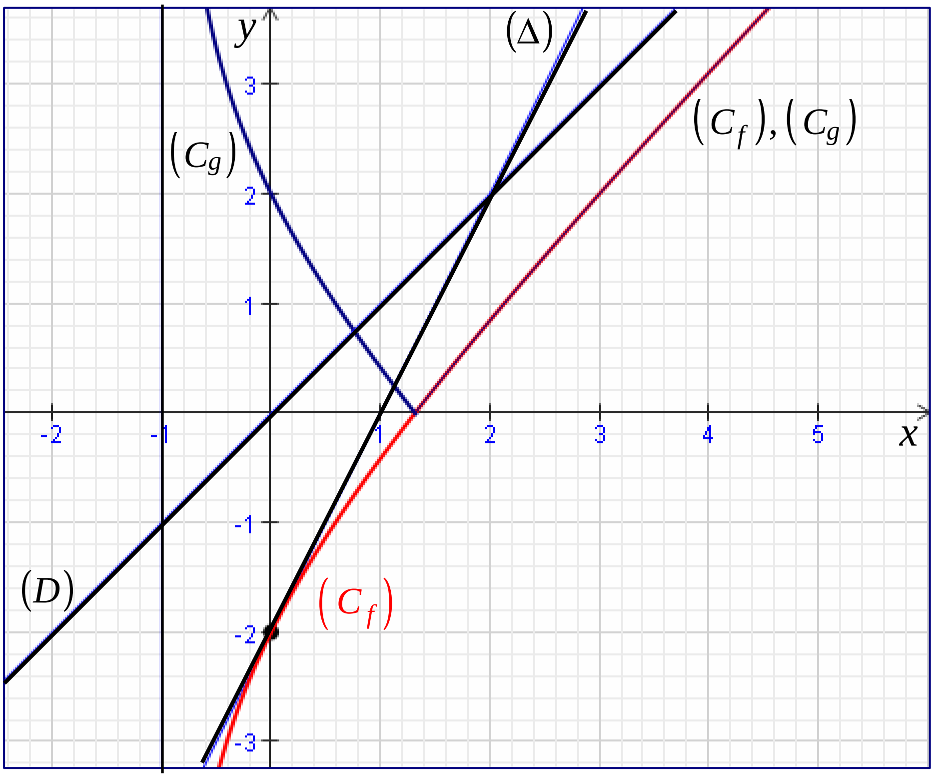
❻ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة $g(x)=m^2$:

- إذا كان : $m^2=0$ أي : $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا .
- إذا كان : $m^2=2$ أي : $m\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم .

- إذا كان : $0 < m^2 < 2$ أي : $m \in]-\sqrt{2} \,;\, \sqrt{2}\,[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .

- إذا كان : $m^2 > 2$ أي : $m \in]-\infty ; -\sqrt{2}\,[\cup]\sqrt{2} ; +\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

● رسم (C_g) :



تمرين محلول 3 : بكالوريا 2009 تقني رياضي (الموضوع الأول) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \dfrac{2}{e^x + 1}$

وليكن C_f تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f .

❷ ادرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

❸ بيّن أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى C_f عند $-\infty$

❹ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1.7<\alpha<-1.6$.

❺ ارسم C_f من أجل $x\in\mathbb{R}$.

❻ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

❼ احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى C_f والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x+2$ ، $x=0$ و $x=\alpha$.

- بيّن أن : $A(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$.

الحل :

❶ حساب $f(x)+f(-x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{2}{e^x+1}-x+\frac{2}{e^{-x}+1}=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=2$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)+f(-x)=2$

• استنتاج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f :

تذكير : إذا كان من أجل كل x من D_f ، لدينا : $\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(x)+f(2a-x)=2b\end{cases}$

فإن النقطة $\Omega(a;b)$ هي مركز تناظر للمنحنى الممثل للدالة f .

من المساواة : $f(x)+f(-x)=2$ نستنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f .

❷ دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

• حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا : $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$ ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- حساب $f'(x)$: من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ ،

$$f'(x)=x'+\left(\frac{2}{e^x+1}\right)'=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

وبالتالي فإنه ، من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$

وعليه فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

- استنتاج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

❸ تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب لـ C_f عند $+\infty$:

تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x)=ax+b+g(x)$ و كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$ و وهي من الشكل $f(x)=ax+b+g(x)$

حيث : $g(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1}=0$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$.

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+2)]$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)-(x+2)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2e^x}{e^x+1}=0$ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f عند $-\infty$.

❹ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1.7<\alpha<-1.6$:

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة . إذا كان :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
- f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
- $f(a)\times f(b)<0$.

تحليليا : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a;b[$.

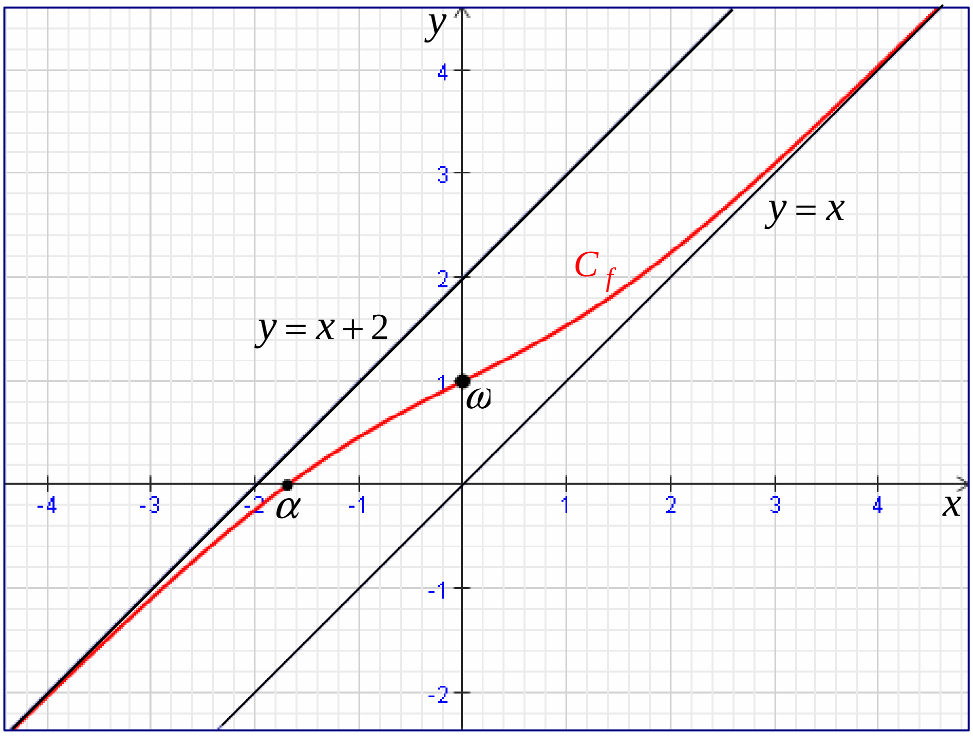
هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $]a;b[$.

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أنها مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1.7;-1.6]$ ، زيادة على ذلك : $f(-1.7)\approx-0.01$ و $f(-1.6)\approx0.06$

وبالتالي : $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$.

نستنتج أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-1.7<\alpha<-1.6$.

❺ رسم المنحني C_f :



❻ تبيان أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$:

طريقة : للبرهان (أو التحقق) على صحة مساواة نتبع إحدى الطرق التالية :

- ننطلق من الطرف الأول وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الثاني .
- ننطلق من الطرف الثاني وباستعمال آليات التبسيط نصل إلى الطرف الأول .
- نقوم بتبسيط الطرف الأول وتبسيط الطرف الثاني ونقارن بين نتيجتي التبسيطين .

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$f(x)=x+\frac{2}{e^{x}+1}=x+\frac{2}{e^{x}\left(1+e^{-x}\right)}=x+\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

❼ حساب $A(\alpha)$:

تذكير : إذا كانت : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ، وكان : من أجل كل x من المجال I ، $u(x)>0$ تكون $\ln u$ دالة أصلية للدالة $\dfrac{u'}{u}$ على I .

- في المجال $[\alpha\,;0]$ المنحنى C_f يقع تحت المستقيم الذي معادلته $y=x+2$.

طريقة 1 : من السؤال ❸ وجدنا أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$f(x)-(x+2)=-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ وبالتالي : $(x+2)-f(x)=\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

$$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}[y-f(x)]\,dx=\int_{\alpha}^{0}[(x+2)-f(x)]\,dx$$

ومنه :

$$=\int_{\alpha}^{0}\left[\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right]dx=\left[2\ln\left(e^{x}+1\right)\right]_{\alpha}^{0}$$

$$=2\left[\ln 2-\ln\left(e^{\alpha}+1\right)\right]\ u.a$$

طريقة 2 : من السؤال (6) وجدنا أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$ وبالتالي : $(x+2)-f(x)=2-\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ومنه : $A(\alpha)=\displaystyle\int_{\alpha}^{0}[y-f(x)]\,dx=\int_{\alpha}^{0}[(x+2)-f(x)]\,dx$

$$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}\left[2-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}\right]dx=[2x+2\ln(e^{-x}+1)]_{\alpha}^{0}$$

وبالتالي : $=[2x+2\ln e^{-x}(1+e^{x})]_{\alpha}^{0}=2[\ln(1+e^{x})]_{\alpha}^{0}$

$=2\ln 2-2\ln(e^{\alpha}+1)\ u.a$

- تبيان أن $A(\alpha)=2\ln(-\alpha)$:

من السؤال ❹ وجدنا أن : $f(\alpha)=0$ أي : $\alpha+\dfrac{2}{e^{\alpha}+1}=0$

ومنه : $e^{\alpha}+1=-\dfrac{2}{\alpha}$

وعليه فإن : $A(\alpha)=2[\ln 2-\ln(e^{\alpha}+1)]=2\left(\ln 2-\ln\left(\dfrac{2}{-\alpha}\right)\right)$

وباستعمال الخاصة $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$ ينتج :

$$A(\alpha)=2[\ln 2-\ln 2+\ln(-\alpha)]=2\ln(-\alpha)$$

إذن : $\boxed{A(\alpha)=2\ln(-\alpha)}$

- استنتاج حصر للعدد $A(\alpha)$:

لدينا : $-1.7<\alpha<-1.6$ ومنه : $1.6<-\alpha<1.7$

وبالتالي : $\ln 1.6<\ln(-\alpha)<\ln 1.7$ وبالضرب في 2 نحصل على :

$2\ln 1.6<2\ln(-\alpha)<2\ln 1.7$ أي : $2\ln 1.6<A(\alpha)<2\ln 1.7$

إذن : $\boxed{0.94<A(\alpha)<1.06}$

تمرين محلول 4 : بكالوريا 2009 تقني رياضي (الموضوع الثاني) :

❶ g دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2x+\ln x$

أ- احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$.

❷ لتكن f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}$

نسمي (c_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- بيّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1;+\infty[$

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

جـ- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f .

د- شكل جدول تغيرات f ، ما هي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين ؟

هـ- جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحني (c_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

❸ نعتبر الدالة h المعرفة على $[1;+\infty[$ بالعبارة $h(x)=f(e^x)$ و (c_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- شكل جدول تغيرات الدالة h .

ب- جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحني (c_h) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

جـ- ارسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (c_f) و (c_h) في نفس المعلم السابق .

الحل :

❶ أ- حساب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

- حساب $g'(x)$: من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $g'(x)=2+\dfrac{1}{x}$.
- إشارة $g'(x)$:

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x}>0$ ومنه : $2+\dfrac{1}{x}>0$ وبالتالي : $g'(x)>0$

إذن : الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جـ- تبيان أنه من أجل كل x من $[1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$:

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $g(1)=2$ نستنتج أنه ،

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 2$ وبالتالي : $g(x)\neq 0$.

❷ أ- تبيان أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$

من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}=\dfrac{x\left(6\dfrac{\ln x}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{\ln x}{x}\right)}=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا : $f(x)=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$ ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

- الاستنتاج : المنحني (c_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=0$ (أي : محور الفواصل) مستقيم مقارب له .

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

- حساب $f'(x)$: من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dots=\dfrac{12(1-\ln x)}{(2x+\ln x)^2}$

- إشارة $f'(x)$: إشارة $f'(x)$ هي أشارة $1-\ln x$ ومنه النتائج التالية :

$f'(x)=0$ يكافئ $1-\ln x=0$ ومنه : $\ln x=1$ وبالتالي : $x=e$

$f'(x)>0$ يكافئ $1-\ln x>0$ ومنه : $x\in[1;e[$

$f'(x)<0$ يكافئ $1-\ln x<0$ ومنه : $x\in\,]e;+\infty[$

إذن : الدالة f متزايدة تماما على $[1;e[$ ومتناقصة تماما على $]e;+\infty[$.

د- جدول تغيرات الدالة f :

$f(1)=0$

$f(e)=\dfrac{6}{1+2e}$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{6}{1+2e}$	$\searrow$	0

• قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين :

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه عندما $k\in\left]0\,;\,\frac{6}{1+2e}\right[$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلين متمايزين .

هـ- معادلة المماس (Δ_1) للمنحني (c_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي :

$$y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

معادلة (Δ_1) من الشكل : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$ حيث :

$f(a)=f(1)=0$ و $f'(a)=f'(1)=3$ ومنه : $y=3(x-1)+0$.

إذن : معادلة المماس (Δ_1) هي $y=3x-3$.

❸ أ- جدول تغيرات الدالة h :

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $h'(x)=f'\left(e^x\right)\times\left(e^x\right)'=e^x\times f'\left(e^x\right)$

إشارة $h'(x)$ هي إشارة $f'\left(e^x\right)$ وإشارة $f'\left(e^x\right)$ من إشارة $(1-x)$ لأن :

$$h'(x)=f'\left(e^x\right)=\frac{12(1-x)}{\left(x+2e^x\right)^2}$$

نستنتج أنه ، من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $h'(x)\le 0$.

$h(1)=f(e)=\frac{6}{1+2e}$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$\frac{6}{1+2e}$ $\searrow$ 0

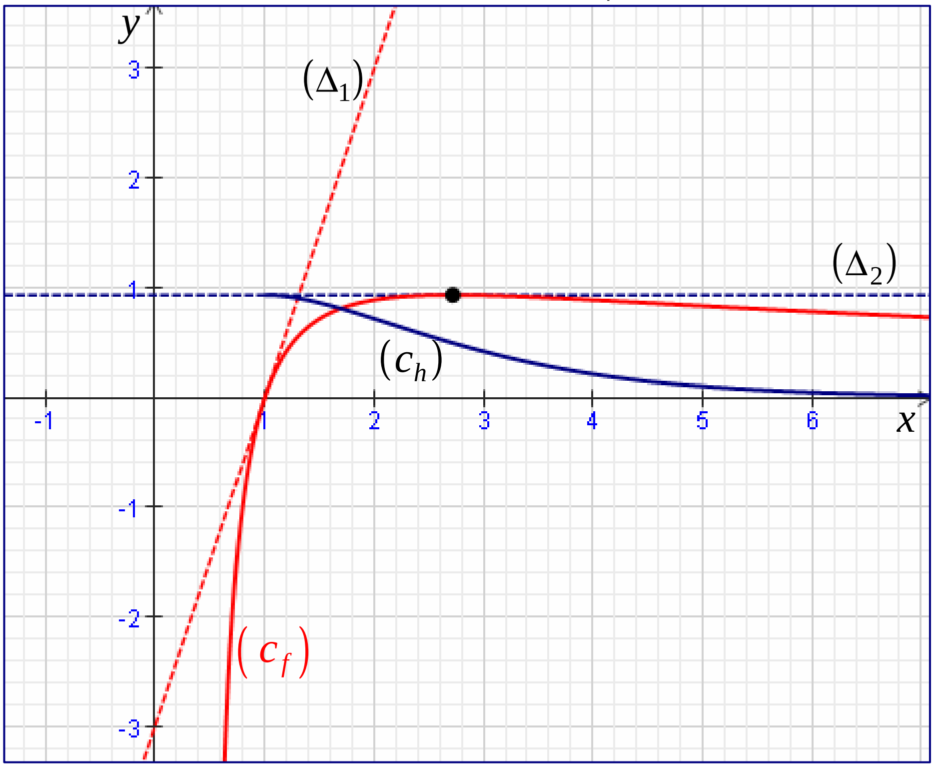
ب- معادلة المماس (Δ_2) للمنحني (c_h) عند النقطة التي فاصلتها 1 :

معادلة (Δ_2) من الشكل : $y=h'(a).(x-a)+h(a)$ حيث :

$h(a)=h(1)=f(e)=\frac{6}{1+2e}$ و $h'(a)=h'(1)=e\times f'(e)=e\times 0=0$

إذن : معادلة المماس (Δ_2) هي $y=\frac{6}{1+2e}$.

جـ- رسم (Δ_1) ، (Δ_2) ، (c_f) و (c_h) :



<u>تمرين محلول 5</u> : (بكالوريا 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

I- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث : a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $1cm$.

- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$.

II- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

❶ بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسّر هذه النتيجة بيانيا . (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

❷ ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

❸ بيّن أن المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

❹ اكتب معادلة المماس للمنحني (C_g) عند النقطة I .

❺ ارسم (C_g) .

❻ H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي :

$H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث : α و β عددان حقيقيان .

- عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$

- استنتج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 .

III- لتكن K الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $K(x)=g\left(x^2\right)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة K ثم شكل جدول تغيراتها .

الحل :

I- تعيين قيمتي a و b :

النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f) معناه : $f(-1)=1$

معامل توجيه المماس عند A يساوي $-e$ معناه : $f'(-1)=-e$

لدينا : $f(-1)=1$ ومنه : $(-a+b)e+1=1$ وبالتالي : $a=b$

ولدينا : $f'(-1)=-e$ حيث : $f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

ومنه : $a-(-a+b)=-1$ نستنتج أن : $a=b=-1$

وعليه فإن : $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

II- ❶ تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$:

لدينا : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1=-xe^{-x}-e^{-x}+1$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0$ لأن : $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0-0+1=1$

• تفسير هذه النتيجة بيانيا :

المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_g) عند $+\infty$.

❷ دراسة اتجاه تغيّر الدالة g :

- حساب المشتقة : $g'(x)=x\,e^{-x}$

- دراسة إشارة المشتقة :

$[\,g'(x)=0\,]$ يكافئ $[\,x=0\,]$

$[\,g'(x)>0\,]$ يكافئ $[\,x>0\,]$ وَ $[\,g'(x)<0\,]$ يكافئ $[\,x<0\,]$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

$g(0)=0$

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+e^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

❸ تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I :

تذكير : إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 وإذا انعدمت دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $M_0(x_0;g(x_0))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى الممثل للدالة g .

لدينا : $g'(x)=x\,e^{-x}$ ومنه : $g''(x)=(1-x)\,e^{-x}$

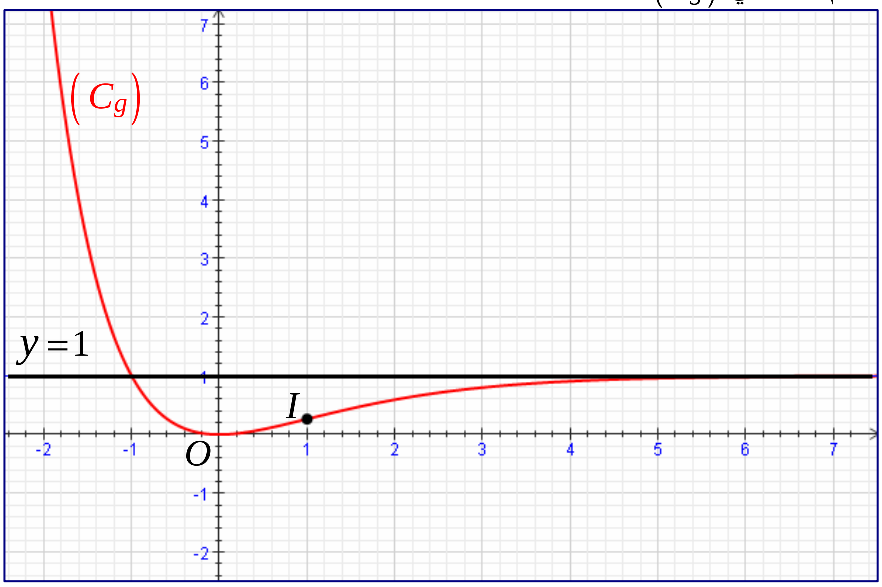
الدالة g'' تنعدم من أجل $x_0=1$ مغيرة إشارتها وبالتالي فإن النقطة $I(1;g(1))$

أي : $I(1;1-2e^{-1})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_g) .

❹ كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I:

معادلة المماس في النقطة I هي : $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$

❺ رسم المنحنى (C_g) :



❻ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة $x \mapsto g(x)-1$:

H دالة أصلية للدالة $x \mapsto g(x)-1$ معناه : $H'(x)=g(x)-1$

ومنه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

وبالمطابقة نستنتج أن : $\alpha=1$ و $\beta=2$ وعليه : $H(x)=(x+2)e^{-x}$

• استنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0 :

لدينا : $H'(x)=g(x)-1$ ومنه : $g(x)=H'(x)+1$

وبالتالي فإن مجموعة الدوال الأصلية للدالة g هي الدوال L من الشكل :

$L(x)=H(x)+x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$ وبما أن : $L(0)=0$ نستنتج أن : $c=-2$

إذن : $L(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$

III- تعيين اتجاه تغير الدالة K:

تذكير : $(u\circ v)'(x)=u'[v(x)]\times v'(x)$

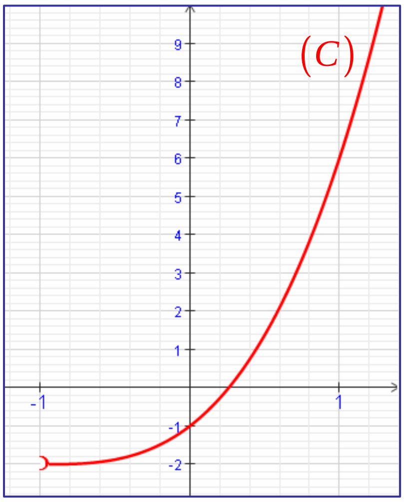
وعليه : $K'(x)=g'(x^2)\times(x^2)'=2x^3e^{-x^2}$ (إشارة $K'(x)$ هي إشارة x)

جدول تغيرات الدالة K:

x	-2		0		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	
$K(x)$	$1-5e^{-4}$	↘	0	↗	1

تمرين محلول 6 : (بكالوريا 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$



❶ أ- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب- علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

جـ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

❷ f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي :

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب- عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا .

جـ- احسب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .

❸ نأخذ $\alpha\approx 0.26$. أ- عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

ب- ارسم المنحني (Γ) .

❹ أ- اكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

ب- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=2$

الحل :

❶ أ- جدول تغيرات الدالة g :

$g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	-2 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

ب- تعليل وجود العدد α :

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة :

إذا كانت g دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وكان $g(a)\times g(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $g(c)=0$.

وإذا كانت الدالة g رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ يكون العدد c وحيدا .

g مستمرة ومتزايدة تماما على $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ وحسب مبرهنة القيم

المتوسطة نستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

- هندسيا : المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

جـ- استنتاج إشارة $g(x)$:

$[\,g(x)=0\,]$ يكافئ $[\,x=\alpha\,]$

$g(x)>0$ يكافئ $x\in\left]\alpha;+\infty\right[$ وَ $g(x)<0$ يكافئ $x\in\left]-1;\alpha\right[$

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

❷ أ- التحقق أنه من أجل كل x من المجال $\left]-1;+\infty\right[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$:

من أجل كل x من المجال $\left]-1;+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)(x^3+3x^2+3x-1)}{(x+1)^4}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب- تعيين $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$: $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2}=0$

- تفسير النتيجة بيانيا : المنحني(Γ) يقبل عند النقطة $A(\alpha;f(\alpha))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل .

جـ- حساب $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$:

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=+\infty$ ومنه : (Γ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$.

- حساب $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$:

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ ومنه : (Γ)يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x+1$

د- جدول تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$ وبالتالي فإن إشارة f' هي إشارة $g(x)$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ أ- تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} : $f(0.26)\approx 1.89$

ب- رسم المنحني (Γ) : انظر الشكل

❹ أ- كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$:

$$x+a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{(x+a)(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{x^3+(2+a)x^2+(1+2a)x+a+b}{(x+1)^2}$$

وبمطابقة $x^3+(2+a)x^2+(1+2a)x+a+b$ مع x^3+3x^2+3x+2

نحصل على : $a=b=1$

ومنه : $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ملاحظة : يمكن استعمال خوارزمية القسمة أو خوارزمية هورنر .

ب- تعيين F :

لدينا : $f(x)=x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ومنه : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x+1}+c$

$F(1)=2$ معناه : $\dfrac{1}{2}\times 1^2+1-\dfrac{1}{1+1}+c=2$ نستنتج أن : $c=1$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$

رسم المنحني (Γ) :