مسألة (09) **I.** f و g دالتان معرفتان على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(1+x)-x \quad \text{و} \quad g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

1. ادرس تغيرات كل من f و g على $]0;+\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x\geq 0$: $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots.+\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots.+\frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n . استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جـ- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n\leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ "

د- بين إذن أن: $\frac{5}{6}\leq \ln\ell\leq 1$. استنتج حصرا لـ ℓ.

مسألة (10) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=-x+\frac{\ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

3) نعتبر الدالة φ المعرفة كما يلي : $\varphi(x)=-x^2+1-\ln x$

أ) ادرس تغيرات الدالة φ. ب) احسب $\varphi(1)$ ثم استنتج إشارة $\varphi(x)$

4) ادرس تغيرات الدالة f

5) ارسم المنحنى (C_f)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار