<u>التمرين (10) :</u>

1) إثبات أن : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ الشرط : $n \ge m \ge 1$

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\times(\mathrm{n-m})!} + \frac{(n-1)!}{m!\times(\mathrm{n-m-1})!} = \frac{(n-1)![m+n-m]}{m!\times(\mathrm{n-m})!} = \frac{(n-1)!\times \mathrm{n}}{m!\times(\mathrm{n-m})!} = C_n^m$$

استنتاج أن: $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$.

بتعويض m بـ m +1 و تعويض n على التوالي بالقيم n +1 ، n ، n-2 ، .... ، m +1 ، m

في : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

نحصل على :

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + \cancel{C_n^{m+1}} \\ \cancel{C_n^{m+1}} = C_{n-1}^m + \cancel{C_{n-1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-1}^{m+1}} = C_{n-2}^m + \cancel{C_{n-2}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-2}^{m+1}} = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m+1} \\ . \\ . \\ \cancel{C_{m+2}^{m+1}} = C_{m+1}^m + \cancel{C_{m+1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{m+1}^{m+1}} = C_m^m + C_m^{m+1} \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف و اختزال الحدود المتساوية

يبقى في الطرف الأول الحد C_{n+1}^{m+1}

و يبقى في الطرف الثاني المجموع المطلوب :

$C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$

ملاحظة في الطرف الثاني : $C_m^{m+1} = 0$

2) * حساب المجموع : $S_1 = 1+2+3+...+n$

بتعويض m = 1 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$C_n^1 + C_{n-1}^1 + ... + C_1^1 = C_{n+1}^2$ أي $1+2+3+...+n = \dfrac{(n+1)\times n}{2}$

* حساب المجموع: $S_2 = 1\times 2 + 2\times 3 + ... + n\times(n-1)$

بتعويض m = 2 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد:

$C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_2^2 = C_{n+1}^3$ أي $\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n-1)\times(n-2)}{2} + ... \dfrac{2\times 1}{2} = \dfrac{(n+1)(n)(n-1)}{3\times 2}$

بضرب الطرفين في 2 نجد: $S_2 = \dfrac{(n+1)n\times(n-1)}{3}$

* حساب المجموع: $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

لدينا $n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n$ بالتعويض في عبارة S_3

$$S_3 = 1 + (2 + 2\times 1) + (3 + 3\times 2) + ... + (n + n(n-1))$$
$$= (1+2+3+.....+\mathrm{n}) + (1\times 2 + 2\times 3 + ... + (n-1)\times n)$$
$$= \mathrm{S}_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الأستاذ : حميدي بوثلجة من البيض

التاريخ : 2008/05/25