التمرين (03) :

1) لما $n = 0$ ، الخاصية صحيحة لأن : $2^0 = C_0^0 = 1$.

لما $n \neq 0$ ، نعوض $a = b = 1$ في دستور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = C_n^0 \times a^n + C_n^1 \times a^{n-1} \times b + ... + C_n^p \times a^{n-p} \times b^p + ...C_n^n \times b^n \quad (p \leq n)$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 \times 1^n + C_n^1 \times 1^{n-1} \times 1 + ... + C_n^p \times 1^{n-p} \times 1^p + .. + .C_n^n \times 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + .. + .C_n^n$$

2) أ) n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m$ هنا يجب فرض $m \geq 1$. نبرهن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

$$mC_n^m = m \times \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{(m-1)! \times (n-m)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times ((n-1)-(m-1))!} = n \times C_{n-1}^{m-1}$$

ب) قيمة المجموع : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m = 0 \times 1 + 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + ... + p \times C_n^p + ... + n \times C_n^n$$

$$= 0 + n \times C_{n-1}^0 + n \times C_{n-1}^1 + ... + n \times C_{n-1}^{p-1} + ... + n \times C_{n-1}^{n-1}$$

$$= n \times \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{p-1} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \times 2^{(n-1)}$$

التمرين (04) :

1) أ) حل المعادلة : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n + 1$ بما أن مهما يكن n : $C_n^0 = 1$

المعادلة تكتب : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n$. حتى تقبل المعادلة حلولا يجب أن يكون عددا زوجيا لأن

الطرف الأول عدد طبيعي و يكون الطرف الثاني طبيعيا إذا كان n زوجيا .

*إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0 .

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 5.

* إذا كان: $n \geq 3$.فإن : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = \frac{5}{2}n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 = 16$ أي $n = 4$. مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

(ضرورة التحقق).

ب) حل المعادلة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

* إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0

* إذا كان $n = 1$ فإن الطرف الأول يساوي 1 و الطرف الثاني يساوي 8

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 6 و الطرف الثاني يساوي 16

* إذا كان: $n \geq 3$.فإن: $C_n^3 + C_{2n}^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة: $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2} = 8n$

بعد الاختزال نجد : $n^2+9n-52=0$ ، $\Delta=289=17^2$ و $n=4$

مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

2) حل في IN^2 الجملة : $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

الشروط : y-1 ≥ 0

الحالة الأولى : x < y-1 و x + y ≥ 2 . تكتب الجملة : $\begin{cases} 0=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $(x+y)\times(x+y-1)=20$ بما أن $(x+y)$ و $(x+y-1)$ عددين متتابعين نستنتج أن :

$x+y=5$. الثنائيات الطبيعية التي تحقق هي : $(0,5)$ و$(1,4)$.

الحالة الثانية :x ≥ y-1 وx + y ≥ 2 تكتب الجملة : $\begin{cases} C_x^{y}+C_x^{y-1}=C_x^{y-1} \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$ أي $\begin{cases} C_x^{y}=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $x+y=5$ و $x \prec y$. الثنائي,التي تحقق هي : $(2,3)$

حلول الجملة هي الثنائيات $(2,3)$; $(1,4)$; $(0,5)$.

التمرين (05) : مركز الأبحاث يتكون من : 6 باحثين و 4 باحثات

اللجنة : 4 أعضاء

1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها : عدد التوفيقات ذات 4 عناصر من مجموعة ذات 10 عناصر

$$C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

2) أ) عدد اللجان التي تضم 4 باحثات : $C_4^4=1$

ب) عدد اللجان التي تضم باحثة واحدة فقط : $C_4^1\times C_6^3=4\times20=80$

جـ) عدد اللجان التي تضم باحثة على الأقل: $C_{10}^4-C_6^4=210-15=195$ (انظر التمرين (01))

د) يوجد في اللجنة باحثان على الأكثر:

تعني : (باحثان وباحثتان) إما (باحث وثلاث باحثات) إما (أربع باحثات)

العدد : $C_6^2 \times C_4^2$ + $C_6^1 \times C_4^3$ + C_4^4

بعد الحساب نجد : 115 .

3) عدد اللجان التي تضم رئيسا ونائبا له وكاتبين : عدد الترتيبات ذات 4 عناصر أي :

$$(4!)\times C_{10}^4=24\times210=5040$$

التمرين (06) : n عدد طبيعي غير معدوم : $L_n=9C_{n+1}^2+27C_{n+1}^3+81C_{n+1}^3+......+3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1) نبين أن : $L_n=4^{n+1}-3n-4$

نعوض في دستور ثنائي الحد : a = 3 و b = 1 (انظر التمرين (03))

$$4^{n+1}=(1+3)^{n+1}=C_{n+1}^0\times1^{(n+1)}+C_{n+1}^1\times1^n\times3^1+C_{n+1}^2\times1^{(n-1)}\times3^2+...+C_{n+1}^{n+1}\times1^0\times3^{(n+1)}$$

$$4^{n+1}=1+(n+1)\times3+3^2\times C_{n+1}^2+3^3\times C_{n+1}^3+.....+3^{n+1}\times C_{n+1}^{n+1}$$

$$4^{n+1}=3n+4+L_n$$

نستنتج أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2) حساب المجموع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$

$$S_n = \left(4^2 - 7\right) + \left(4^3 - 10\right) + ... + \left(4^{n+1} - 3n - 4\right)$$
$$= \left(4^2 + 4^3 + ... + 4^{n+1}\right) - \left(7 + 10 + ... + 3n + 4\right)$$

القوس الأول يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 4^2 وأساسها 4 وعدد حدودها (n-1)

و القوس الثاني يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 7 وأساسها 3 وعدد حدودها (n-1)

نستنتج أن : $S_n = \left(4^2 \times \frac{4^{(n-1)} - 1}{4 - 1}\right) - \left((n-1) \times \frac{(7 + 3n + 4)}{2}\right) = \frac{16}{3}\left(4^{(n-1)} - 1\right) - \frac{(n-1)\times(3n+11)}{2}$

<u>التمرين (07) :</u>

1) برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

المرحلة الأولى :

التحقق من أجل n = 0 . الطرف الأول : $0\times 0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي كيفي n .نفرض : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

ونبرهن أن : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...(n+1)\times(n+1)! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

$$1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ...(n+1)\times(n+1)! = 1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + ... + n\times n! + .(n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)!\times(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

<u>المرحلة الأولى</u> :

التحقق من أجل n = 1 . الطرف الأول : $2^1 \times 1 = 2$ والطرف الثاني : $\frac{(2\times 1)!}{2!} = \frac{2!}{2!} = \frac{2}{2} = 1$

<u>المرحلة الثانية</u> : من أجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم نفرض: $2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

ونبرهن أن : $2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2(n+1)-1)\right] = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$

$$2^{(n+1)}\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....\times(2(n+1)-1)\right] = 2\times 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....(2n-1)\times(2n+1)\right]$$
$$= 2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times ....(2n-1)\right]\times 2\times(2n+1)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!}\times 2\times(2n+1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)}\times(2n+1)\times 2(n+1)$$
$$= \frac{(2n)!\times(2n+1)\times(2\quad +2)}{(n+1)!\quad n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .