امتحان البكالوريـــا التجريبي — دورة مـــــاي :2015

اختبـــــار في مـــادة الرياضيـــــات — المـــدة4 ساعـــات

على التـــلميذ أن يعـــالج أحد الموضـــوعين على الخيـــــار

الموضــــــوع الأول

التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ وليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. بين أن المستقيمين (AB) و(D) لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي (P) الذي يوازي(D) و يشمل (AB)
   - أ. بين أن الشعاع$\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
   - ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P)
   - ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من(D) و (P) ثابتة ، حدد هذا الثابت
   - د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ)المعرف بتقاطع (P)والمستوي (Oxy)
   - ه. عين مجوعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   - و. لتكن(S) سطح كرة التي تمس (P)في النقطة$C(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن(P) بمسافة $d=6$ ويقع من جهة O ، عين معادلة ديكارتية لــ (S)
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي(OAB) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

   ب/ بين أن المستوي (OAB)و سطح الكرة (S) يتقاطعان و فق دائرة (Γ)يطلب تحديد عناصرها المميزة

التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين a و bبحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$

   ب/ استنتج في المجموعة$(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن$y_{2013}=0$ و أكتب العدد $2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس$\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ ولتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5+2^{2015}y_{2015}$
   - أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = 2^{2015} y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$ حيث: Z_n لاحقة A_n

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)$ المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. بين أن $\left(U_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) .... 5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د/ حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم $\left(D'\right)$ الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم $\left(D'\right)$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم (D)، $\left(D'\right)$ و (C)

5. ليكن $\left(\Delta_m\right)$ المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ و المنحنى (C)

II. نضع : $I=\int_{2}^{3}\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد I
2. بين أنه من كل x من $[0;+\infty[$ ، $\ln(1+X)\leq X$
3. استنتج أن: $0\leq I\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$ و أعط حصرا للعدد I سعته $0,02$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

1. أ/ تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}\left(z_A-z_C\right)$
ب/ استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان
2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D
ب/ حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل
ج/ بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما
3. لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$
حيث z_n لاحقة النقطة M_n و نضع : $U_n=\left|z_n-z_\Omega\right|$ من أجل كل عدد طبيعي n
أ/ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
ب/ عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة
ج/ نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقية $[A\Omega],[M_1\Omega]...............,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$
- أحسب المجموع T_n بدلالة n
4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$
- حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$

التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$ ....(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. بين أن العددين x و y أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1)
4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17
5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\hat{ABC}$
2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي (P) ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء التي تحقق: $AM=CM$ هي المستوي $\left(P'\right)$ الذي معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$

ج/ بين أن $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ متقاطعان وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$ يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ يقطع المستوي $\left(ABC\right)$ في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة: $\left\{\left(A;\alpha^2-1\right);\left(B;\alpha^2+2\right);\left(C;-2\alpha^2\right)\right\}$ حيث α وسيط حقيقي

- عين بدلالة α إحداثيات G_α و استنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$

<u>التمرين الرابع :7 نقط</u>

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ كمايلي : $\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1, x>0 \\ f\left(0\right)=1 \end{cases}$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)

I. 1. أحسب نهاية f عند $+\infty$

1. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha\geq 0$ و $f\left(\alpha\right)=0$ ، ثم تحقق أن : $4,6<\alpha<4,7$
4. أكتب معادلة للمستقيم $\left(D\right)$ المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

II. g دالة معرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ : $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2x-\dfrac{1}{2}$

1. أحسب $g'\left(x\right)$ و $g''\left(x\right)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $\left]0;+\infty\right[$
2. حدد اتجاه تغيرات الدالة g ، ثم استنتج وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(D\right)$
3. أنشىء $\left(D\right)$ و $\left(C_f\right)$

III. 1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x dx$

- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ و المماس $\left(D\right)$ و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\dfrac{1}{n}$ و $x=1$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}A(n)$

انتهـــــــــــــــــــــى

مع تمانيـــاتنا بالنجاح في شهـــادة البكـــــالوريا

أساتـــذة المـــــادة