الموضوع الأول

التمرين الأول :

1.تمثيل الوسيطي لـ (AB) :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة

$A(8;0;8)$ إذن : $(AB):\begin{cases}x=2\lambda+8\\y=3\lambda\\z=2\lambda+8\end{cases};\lambda\in IR$

2.تبيان أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ (AB) و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$

شعاع التوجيه لـ (D) ومنه : $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه (AB) و (D)

غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases}-5+3t=2\lambda+8...(1)\\1+2t=3\lambda....(2)\\-2t=2\lambda+8....(3)\end{cases}$ بعد التبسيط بين

المعادلتين (2) و (3) نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا

تحقق المعادلة (1) إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن

(AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي

3. (P) المستوي الذي يوازي (D) و يشمل (AB)

أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) :

يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و على $\overrightarrow{u_{(D)}}$

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0$

ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ (P) :

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج :

$2(8)+0(-2)+1(8)+d=0$ ومنه :

$d=-24$

$(P):2x-2y+z-24=0$

ج. تبيان أن المسافة $d((P);(D))$ ثابتة مع تحديد الثابت :

لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$

ومنه :

$$d((P);(D))=d((P);M)=\frac{\left|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

ومنه : $d((P);(D))=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$

د. التمثيل الوسيطي لـ (Δ) المعرف بتقاطع (P) و (Oxy) :

لدينا : $\begin{cases}(P):2x-2y+z-24=0\\(Oxy):z=0\end{cases}$ و بوضع : $y=k$ ينتج :

$(\Delta):\begin{cases}x=k+12\\y=k\\z=0\end{cases};k\in IR$ أي : $\begin{cases}x=y+12\\y=k\\z=0\end{cases}$

هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء

$\begin{cases}2x-2y+z-24=0\\z=0\end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم (Δ)

و. تعيين معادلة ديكارتية لـ (S) :

نصف قطر لـ (S) هو $C\omega=6$

لنعين إحداثيات ω : لنفرض $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ حيث (Δ')

المستقيم العمودي على (P) في C ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases}x=2k'+10\\y=1-2k'\\z=6+k'\end{cases};k'\in IR$ ومنه : $d((P);\omega)=6$ بعد

التبسيط نجد : $d((P);\omega)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(14;-3;8)$ أو $\omega(6;5;4)$

بتعويض إحداثيات كل من ω و النقطة O في معادلة (P)

$O(0;0;0):-24<0$

نجد : $\omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0$ اذن

$\omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0$

$\omega(6;5;4)$ و النقطة O في نفس جهة من المستوي (P) **إذن**

معادلة لـ (S) هي : $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$

4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو (OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ (OAB) و

يشمل النقطة O إذن :

$(OAB):\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases};(t';\lambda')\in IR^2$

استنتاج المعادلة الديكارتية لـ (OAB) :

$\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\y=3\lambda'\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases}x=8t'+10\lambda'\\\lambda'=\frac{y}{3}\\z=8t'+10\lambda'\end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

$(OAB):x-z=0$:

ب. تبيان أن (S) و (OAB) متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :

لدينا : $d\left((OAB);\omega\right)=\frac{|6-4|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2}<6$ إذن :

$(S)\cap(OAB)$ هو دائرة

المستقيم الذي يشمل ω ويعامد (OAB) هو :

$\begin{cases}x=6+h\\y=15\\z=4-h\end{cases};h\in IR$ ومنه مركز الدائرة هو Ω نقطة تقاطع

هذا المستقيم مع (OAB) وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و

$\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها r حيث :

$r=\sqrt{R^2-d^2\left((OAB);\omega\right)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$

التمرين الثاني :

1.تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ ومنه : $\begin{matrix}a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3}\\b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3}\end{matrix}$ بالمطابقة

$(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2=2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$

3.تبيان أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$:

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

4.أ.تحقق أن : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$:

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\frac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافىء $z_B-z_C=i\sqrt{3}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه : $\left|z_B-z_C\right|=\sqrt{3}\left|z_A-z_C\right|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

$CB=\sqrt{3}CA$

يكافىء : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{2}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و

نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C و نسبته

$\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C(1-\alpha)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

5.أ.تبيان أن (U_n) **متتالية هندسية مع تحديد أساسها** q **و حدها الأول** U_0 :

لدينا :

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|=\left|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta\right|$$

$$=\left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|i\sqrt{3}\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول

$$U_0=\left|z_1-z_0\right|=\left|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0\right|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n **بدلالة** n :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n **بدلالة** n :

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا : $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف1

$\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times....\times U_n\times U_{n+1}=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}^{n+1}=$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

التمرين الثالث :

1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ ومنه :

$5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و 3 و 5 أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$

ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافىء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$

أي : $5(k)-2y_0=1$

ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times 2+1$ ومنه $5-2(2)=1$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي :

$5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيمابينها و $5/(x-3)$ أي $6/5(x-3)$ ومنه $x=6k+3$

بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$

ج.استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافىء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي :

$5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد :

$(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α و β في x نجد : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

د. حل الجملة (S) بطرق غير استنتاجية :

(S) تكافىء $\begin{cases}5x\equiv -5[30]\\6x\equiv -24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv -19[30]$ أي :

$x\equiv -19[30]$ ومنه $x\equiv 11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث :

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) و $x^2-y^2\le 56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le 56$ تكافىء $11k^2+16k-51\le 0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le 0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

4.تعين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$ فإن : $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و

$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times 5^3=126\alpha+25\beta$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافىء $5a-6b=3$ ومنه :

$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد

$51\alpha+25\beta=202$ وبما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$

التمرين الرابع : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

1.أ.إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$ لإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ ومنه :

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

تبيان أن (D) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن (D) م م لـ (C) عند $+\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-x>0$ اذن (C) يقع فوق (D) من اجل كل x من IR

2.أ. إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^{x}+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^{x}}\right)$

$=\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln e^{x}=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$ لأن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

تبيان أن (D') ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+\ln 2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2=0$

إذن (D') م م لـ (C) عند $-\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة لـ (D') :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل

x من IR و منه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن (C) يقع فوق

(D') من اجل كل x من IR

3.**دراسة إتجاه تغير f** : f ق إ على IR حيث :

$f'(x)=\frac{e^{x}-2e^{-x}}{e^{x}+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^{x}\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}$

إشارة $f'(x)$: تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^{x}\left(e^{x}+2e^{-x}\right)>0$

$e^{2x}-2\geq 0$ معناه : $e^{2x}\geq 2$ معناه $2x\geq\ln 2$ أي $x\geq\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

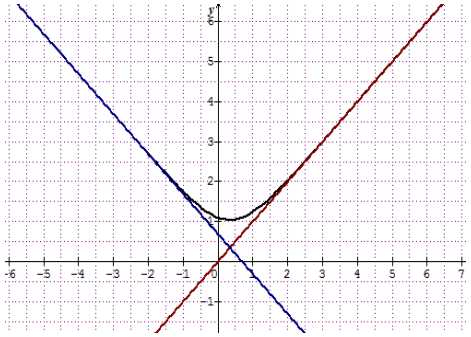
الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3\ln 2}{2}$	$+\infty$

4. **الرسم :**



5.**أ.تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة**

من أجل كل عدد حقيقي m : لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافىء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافىء : $\begin{matrix}y-\frac{\ln 2}{2}=0\\ x-\frac{\ln 2}{2}=0\end{matrix}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};y=\frac{\ln 2}{2}$

ب. المناقشة البيانية:

إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) هو (D)

إذا كان $m=-1$ فإن (Δ_m) هو (D')

(D) و (D') يتقاطعان في نقطة الثابتة A

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن (Δ_m) لايقطع المنحنى (C)

إذا كان $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن (Δ_m) يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة

II .1. تفسير الهندسي للعدد I : I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

2.**تبيان من أجل كل x من $[0;+\infty[$:** $\ln(1+X)\leq X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة h

لدينا h ق.إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدالة h سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه

$\ln(1+X)-X\leq 0$ أي $\ln(1+X)\leq X$

3.**استنتاج أن** : $0\leq I\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$

لدينا : $I=\int_{2}^{3}\left(f(x)-x\right)dx=\int_{2}^{3}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx$ و بما أن :

$2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR $([2;3])$

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \le 2e^{-2x}$ **ومنه :**

$$I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx \text{ أي } \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \ge 0$ **وبما أن** $2 < 3$ **فإن**

$$0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx \text{ ومنه : } I \ge 0 \text{ أي } \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \ge 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

1-أ/ **تحقق أن :** $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

لدينا: $z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a}i + \frac{1}{a}i$

$= 1 + \frac{a-1+1}{a}i = 1 + i$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}(z_A - z_C) = \frac{1}{a}i(a - ai) = i + 1$

ومنه : $z_B - z_D = \overline{z_D}(z_A - z_C)$

ب/ استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان :

من السؤال -أ- لدينا : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a}i$ و منه :

$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لان $\frac{1}{a} > 0$ وبالتالي :

$\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{DB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : (AC) و (BD) متعامدان

2- أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$

لدينا $S(A) = B$ معناه : $z_B = \alpha z_A + \beta$....(1)

$S(C) = D$ معناه : $z_D = \alpha z_C + \beta$....(2) ومنه بطرح (1) من (2) نجد : $z_B - z_D = \alpha(z_A - z_C)$ ومنه : $\alpha = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D}$

ومنه : $\alpha = \frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D = \alpha z_C + \beta$ ومنه : $\beta = z_D - \alpha z_C$ اي :

$\beta = 1 - \frac{1}{a}i$ ومنه : $\beta = -\frac{1}{a}i - \frac{1}{a}i(ai)$

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{a}iz + 1 - \frac{1}{a}i$

ب/ تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S :

نعلم أن : $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega = \frac{1 - \frac{1}{a}i}{1 - \frac{1}{a}i} = 1$ ومنه $z_\Omega = 1$

- تحديد العناصرة المميزة للتشابه S :

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a} > 0$)

ج/ تبيان أن المثلثين OAC و BHD متشابهان :

لدينا $S(A) = B$ و $S(C) = D$

لنحدد لاحقة النقطة O بالتشابه S

$z_H = 1 + z_D = 1 - \frac{1}{a}i$ لأن $z' = \frac{1}{a}i(0) + 1 - \frac{1}{a}i = 1 - \frac{1}{a}i = z_H$

وهكذا $S(O) = H$

إذن صورة المثلث OAC بالتشابه S هو المثلث BHD ومنه المثلثان OAC و BHD متشابهان

- **ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :**

$A(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD) = \frac{A(OAC)}{a^2}$

3- أ/تبيان أن (U_n) متتالية هندسية :

لدينا : $U_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1} = S(M_n)$ فإن : $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n = \frac{1}{a}|z_n - z_\Omega| = \frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{a}U_n$ ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0 = |a-1|$: أي $U_0 = |z_A - z_\Omega| = |z_0 - z_\Omega| = |a-1|$

ب/ تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة :

(U_n) متقاربة يعني : $-1 < q \le 1$ أي : $-1 < \frac{1}{a} \le 1$ و بما أن $\frac{1}{a} > 0$ ينتج : $0 < \frac{1}{a} \le 1$ أي $a \ge 1$ و بما أن $a \ne 1$ فإن : $a > 1$

أي : $a \in]1; +\infty[$

ج/ حساب المجموع T_n بدلالة n :

(نلاحظ أن : $T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega + ... + M_0\Omega$

ومنه : $U_n = |z_n - z_\Omega| = U_n$) ومنه $T_n = U_{n+1} + U_n ..... + U_0$

ومنه : $T_n = U_0\left(\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\right)$ ومنه : $T_n = |a-1|\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$

$T_n = a \times \frac{|a-1|}{a-1}\left(1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$

4- لدينا $Z = a(1 + e^{i\theta})$ و $\theta \in IR$:

- **تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ) :**

$Z = a(1 + e^{i\theta})$ يكافىء :

$Z = a + ae^{i\theta}$ يكافىء $Z - a = ae^{i\theta}$ و بما أن $\theta \in IR$

يكون لدينا $|Z - a| = |a| = a$ لان $a > 0$ أي (Γ) هي دائرة مركزها A ذات اللاحقة a و نصف قطرها $r = a$

التمرين الثاني :

I. تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة

$2014\alpha = 475\beta + m$ **حلولا في** $\mathbb{Z}^2$ **:**

$2014\alpha = 475\beta + m$ تكافىء $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

II. لدينا المعادلة $2014x-475y=-19$....(1) :

1.تعيين الحل $(x_0;y_0)$ **للمعادلة** (1) **الذي يحقق** $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء $106x-25y=-1$...$(*)$ و لدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$

2.حل في $\mathbb{Z}^2$ **المعادلة** (1) :

المعادلة (1) و المعادلة $(*)$ متكافئتان لهما نفس مجوعة الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1$...$(*)$

بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة $(*)$ فإن :

$106(4)-25(17)=-1$...(E)

من $(*)$ و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3.تبيان أن x **و** y **أوليان فيمابينهما حيث** $(x;y)$ **حل للمعادلة** (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y أي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ إذن $d/106x-25y$: أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$

إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه x و y أوليان فيمابينهما

4. تعين قيم العدد الطبيعي n **بحيث :** $n\equiv 4[25]$ **وباقي قسمة** n **على** 106 **هو** 17 :

أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv 4[25]\\n\equiv 17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ ومنه

$106\beta+17=25\alpha+4$ ومنه $106\beta-25\alpha=-13$:

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(13\times 13;17\times 4)$ حل خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال 2.

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن

$n=106\beta+17$ بالتعويض نجد

$n=106(25p+52)+17$ ومنه :

$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$

5.تعيين الثنائيات $(x;y)$ **من** $\mathbb{Z}^2$ **حلول المعادلة** (1) **حيث :** $x+y$ **مضاعف لـ** 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

و لدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv 0[10]$ أي :

$131k+21\equiv 0[10]$ أي : $k+1\equiv 0[10]$ أي $k\equiv -1[10]$ أي

$k\equiv 9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :

$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث :

1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $\hat{BAC}$:

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times COS\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ومنه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

$COS\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$ ومنه

$\hat{BAC}=77^0$

2.**استنتاج أن النقط** A ، B **و** C **ليست في استقامية :**

بما أن : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=77^0$ فإن A ، B و C ليست في استقامية

استنتاج أن معادلة المستوي (ABC) **هي** $2x-y+2z+2=0$

$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$

لدينا : $B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$

$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

3.أ. **كتابة معادلة الديكارتية للمستوي** (P) **المستوي المحوري لـ** $[AB]$:

(P) المستوي المحوري لـ $[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$

ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ **من الفضاء التي تحقق** $AM=CM$ **هي المستوي** (P') **معادلته** $4y+2z-7=0$:

$AM=CM$ معناه :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$

و بعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)

ج. تبيان أن (P) **و** (P') **متقاطعان :** لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$

و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ و منه $\dfrac{0}{6}\neq\dfrac{4}{4}\neq\dfrac{2}{-4}$ إذن (P) و (P')

متقاطعان وفق مستقيم

تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P')

لدينا : $\begin{cases}6x+4y-4z-1=0\\4y+2z-7=0\end{cases}$ ومنه :

$\begin{cases}6x-6z=-6\\4y=-2z+7\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}6x-2z+7-4z-1=0\\4y=-2z+7\end{cases}$ و منه

$\begin{cases}x=z-1\\y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}\\z=z\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z-1\\y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}\end{cases}$ ومنه :

$(\Delta):\begin{cases}x=t-1\\y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR\\z=t\end{cases}$: إذن $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$

4.أ/ تبيان أن (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ ومنه : $\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$

$\vec{u}_{(\Delta)}\,//\,\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن (Δ) و (ABC) متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي ω

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

ب/ استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لتبيان أن ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

5. النقطة G_α مرجح الجملة

$\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ حيث : α عدد حقيقي

ـ تعين احداثيات النقطة G_α :

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

ـ استنتاج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في IR :

لدينا : $\begin{cases}x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4\\y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2\\z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2\end{cases}$; $\alpha^2\in IR$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

ومنه تمثل النقط G_α مستقيم $\begin{cases}x_{G_\alpha}=3\lambda+4\\y_{G_\alpha}=4-2\lambda\\z_{G_\alpha}=-3-4\lambda\end{cases}$; $\lambda\in IR$

التمرين الرابع :

I.لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1, x>0$ و $f(0)=1$

1.حساب نهاية f عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1=-\infty$

2.دراسة قابلية إشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لانها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية إشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1-1}{x}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{2}x\left(3-\ln x^2\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

ومنه الدالة f

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{3}{2}x-x\ln x=0$$

قابلة للاشتقاق على يمين 0 و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

3ـدراسة إتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتق:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)=x(3-2\ln x)-x$

ومنه : $f'(x)=2x(1-\ln x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $2x>0$

$f'(x)\geq 0$ يكافىء $(1-\ln x)\geq 0$ يكافىء $\ln x\leq 1$ أي $x\leq e$ أي $x\in]0;e]$ إذن :

$x\in]0;e]$ يكافىء $f'(x)\geq 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما ونستنتج $x\in[e;+\infty[$ يكافىء $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	
	‖	1			$-\infty$

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$

تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$: من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ و مستمرة على هذا المجال و لدينا :

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا وحيدا α في المجال

$[e;+\infty[$ نلاحظ على المجال $[0;e]$ أن $f(x)\geq 1$ وهكذا

يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$:

لدينا : $f(4,6)=$ و $f(4,7)$ أي : $f(4,7)\times f(4,6)<0$

5ـ كتابة معادلة للمماس (D) **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1 :

$(D):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه : $(D):y=2x+\frac{1}{2}$

II.لدينا : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$:

1. حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g'(x)=f'(x)-2$ أي $g'(x)=2x(1-\ln x)-2$

الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g''(x)=2(1-\ln x)+2x\left(\frac{-1}{x}\right)$ أي $g''(x)=-2\ln x$

- **دراسة إتجاه تغير** g' :

$g''(x)\geq 0$ يكافئ $-2\ln x\geq 0$ يكافئ $\ln x\leq 0$ يكافئ $0<x\leq 1$ إذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x)<0$ يكافئ $-2\ln x<0$ يكافئ $\ln x>0$ يكافئ $x<1$ إذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

- **جدول تغيرات** g' :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$\|$	0		$-$
$g'(x)$	$\|$	-2		0	$-\infty$

- **إشارة الدالة** g' **على المجال** $]0;+\infty[$:

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)\leq 0$

2ـ تحديد إتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال ـ1ـ $g'(x)\leq 0$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\|$	0		$-$
$g(x)$	1	$\|$		0	$-\infty$

$g(1)=0$

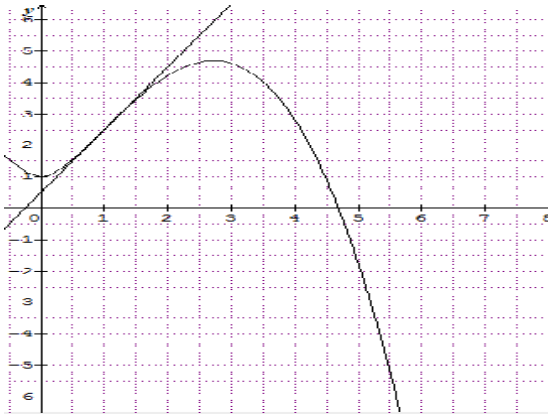
من جدول تغيرات الدالة g نجد : $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in]0;1]$

$g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[1;+\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) **بالنسبة إلى** (D) : يعود إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-2x-\frac{1}{2}$ أي إشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
الوضعية	$\|$	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)	

3ـ إنشاء (C_f) **و** (D) :



III.1. حساب I_n **بدلالة** n **باستعمال المكاملة بالتجزئة** :

لدينا : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$ ، نضع : $\begin{matrix}u'(x)=x^2\\ v(x)=\ln x\end{matrix}$ ومنه :

$\begin{matrix}u(x)=\frac{x^3}{3}\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{matrix}$ اذن : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx$

ومنه:

$I_n=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$ أي

$I_n=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{n^3}\right)$ بعد التبسيط نجد :

$I_n=\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)-\frac{1}{9}$

2ـ استنتاج بدلالة n **المساحة** $A(n)$:

بما أن $0<\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ أي $0<x<1$ فإن $f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$

حسب السؤال ـ2ـ من الجزء ـIIـ أي من أجل $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ فإن :

$f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$ و بالتالي

$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)dx$ ولدينا :

$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x)+1-2x-\frac{1}{2}$$

ومنه :

$$=\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x$$

$$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x\right)dx$$

ومنه

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x dx$$

$A(n)=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-I_n$ بعد التبسيط نجد :

$$A(n)=-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-I_n$$

وبعد التبسيط

$$=-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)+\frac{1}{9}$$

نجد:

$$A(n)=\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)+\frac{1}{9}\right)\times 4cm^2$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}A(n)$ **:**

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}=0$ ومنه نجد $\lim_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}\times 4=\frac{4}{9}$

ملاحظة هامة: تضرب قيمة المساحة بمربع وحدة الطول أي بالعدد $2\times 2=4$