التمرين الأول : $Z^2 - 2Z + 5 = 0$

1) $\Delta = -16$ حلا المعادلة هما: 1

$\boxed{Z_1 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i}$ و $\boxed{Z_2 = 1 - 2i}$

أ/ $Z_I = 1 - 2i$ ، $Z_B = -3$ ، $Z_A = 2 + \overline{Z_I}$

$Z_A = 3 + 2i$

$$Z = \frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B} = \frac{1 - 2i - 3 - 2i}{1 - 2i + 3} = \frac{-2 - 4i}{4 - 2i}$$

$$Z = \frac{-1 - 2i}{2 - i} = \frac{(-1 - 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-2 - i - 4i + 2}{4 + 1}$$

0.5 $Z = \frac{-5i}{5}$ ومنه : $\boxed{Z = -i}$

0.5 $\boxed{Z = e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

ب) $\left|\frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{Z_I - Z_A}{Z_I - Z_B}\right) = \frac{-\pi}{2}$

0.5 $AI = BI$ و $(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IA}) = \frac{-\pi}{2}$

$\boxed{AIB \text{ قائم في } I \text{ ومتساوي الساقين}}$

ج) لدينا $h(A;2)$ تحاكي و $h(I) = C$

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z' - Z_A = 2(Z - Z_A)$

$h(I) = C$ ومنه : $Z_C - Z_A = 2(Z_I - Z_A)$

$Z_C = 2Z_I - Z_A$

0.5 $Z_C = 2 - 4i - 3 - 2i = -1 - 6i$

$\boxed{Z_C = -1 - 6i}$

3) G مرجح الجملة : $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ 0.5

أ) $\boxed{Z_G = \frac{Z_A - Z_B + Z_C}{1 - 1 + 1} = 3 + 2i + 3 - 1 - 6i = 5 - 4i}$

ب) $2\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$

لتكن H منتصف $[AB]$

$2\left\|(1 - 1 + 1)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|(1 + 1)\overrightarrow{MH}\right\|$

0.75 $2MG = 2MH$ ومنه : $\boxed{MG = MH}$

$\boxed{\text{مجموعة النقط } (\Gamma_1) \text{ محور القطعة } [GH]}$

ج) $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

0.75 $\left\|(1 - 1 + 1)\overrightarrow{MG}\right\| = 4\sqrt{5}$ ومنه $\boxed{MG = 4\sqrt{5}}$

$\boxed{\text{مجموعة النقط } (\Gamma_2) \text{ دائرة مركزها } G \text{ ونصف}}$

$\boxed{\text{قطرها } r = 4\sqrt{5}}$

التمرين الثاني : $U_1 = \sqrt{e}$, $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$

1) حساب u_2, u_3, u_4 :

0.75

$$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{e} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{e} + 4}{3} \approx 2{,}43$$

$$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{e} + 4}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{e} + 23}{9} \approx 3{,}28$$

$$U_4 = \frac{2}{3}U_3 + \frac{3}{3} + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{4\sqrt{e} + 23}{9}\right) + 2 = \frac{8\sqrt{e} + 100}{9} \approx 12{,}58$$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$

* من اجل $n = 1$: $U_1 = \sqrt{e} \approx 1{,}6$ ومنه $U_1 \leq 1 + 3$ (محققة)

*نفرض أن $U_n \leq n + 3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1} \leq n + 4$

لدينا : $U_n \leq n + 3$ ومنه: $\frac{2}{3}U_n \leq \frac{2}{3}(n + 3)$

1

إذن: $\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1$

وبالتالي: $U_{n+1} \leq n + 3$ ومنه $U_{n+1} \leq n + 3 \leq n + 4$

ومنه : $U_{n+1} \leq n + 4$ إذن $p(n + 1)$ **صحيحة**

*الإستنتاج : من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n + 3$

ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}U_n = \frac{1}{3}(n + 3 - U_n)$$

0.25

لدينا : $U_n \leq n + 3$ ومنه: $n + 3 - U_n \geq 0$

أي: $\frac{1}{3}(n + 3 - U_n) \geq 0$ ومنه: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ومنه: (U_n) **متزايدة**

3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n = U_n - n$

لدينا : $V_{n+1} = U_{n+1} - (n + 1)$

1 $V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$

أي : $V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n - n)$ $\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n}$

(V_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1 = U_1 - 1 = \sqrt{e} - 1$

ب) عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ 0.25

$$\boxed{V_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

ب) عبارة U_n : $V_n = U_n - n$ 0.25

ومنه $U_n = V_n + n$ إذن : $\boxed{U_n = (\sqrt{e} - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n}$

تابع التمرين الثاني:

4) حساب: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$

لدينا : $V_n = V_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right)\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}\right]$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right)\left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

0.5

$S_n = \frac{2}{3} V_1 \left[1 \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$ أي $\boxed{S_n = \frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}$

حساب: $S'_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

لدينا: $U_n = V_n + n$ **ومنه:**

$$S'_n = (V_1 + 1) + (V_2 + 2) + \dots + (V_n + n)$$

$$S'_n = (V_1 + V_2 + \dots + V_n) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S'_n = V_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{n}{2}(1+n)$$

$$S'_n = (\sqrt{e}-1) \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n}{2}(1+n)$$

0.5

$$\boxed{S'_n = 3(\sqrt{e}-1) \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}}$$

0.25

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2} = \frac{3}{n^2}(\sqrt{e}-1) \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$$

0.25

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$

التمرين الثالث : $A(3,2,1)$ $B(3,5,4)$ $C(0,5,1)$

1) إثبات أن ABC **متقايس الأضلاع:**

$\vec{AB}(0,3,3)$ ، $\vec{AC}(-3,3,0)$ ، $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

0.5

إذن $\boxed{AB = AC = BC}$ ABC **متقايس الأضلاع**

2) التحقق أن $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)**:**

0.25

$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = 0 + 3 - 3 = 0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = -3 + 3 + 0 = 0 \end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}$ **أي:** $\vec{n} \perp (ABC)$

ومنه $\vec{n}(1;1;-1)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)

معادلة (ABC) **:** $x + y - z + d = 0$

0.5

$A(3,2,1) \in (ABC)$ **أي:** $3 + 2 - 1 + d = 0$ **أي:** $d = -4$ **ومنه :**

$$\boxed{(ABC): x + y - z - 4 = 0}$$

3) أ) تعيين إحداثيات G **مركز ثقل المثلث** ABC **:**

0.25

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

أي: $G\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{2+5+5}{3}, \frac{1+4+1}{3}\right)$ **ومنه:** $\boxed{G(2,4,2)}$

ب) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

لدينا $G(2,4,2) \in (\Delta)$ **و** $(\Delta) \perp (ABC)$

0.5

يمكن اعتبار $\vec{n}(1;1;-1)$ **شعاع توجيه للمستقيم** (Δ)

$$\boxed{(\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 - t \end{cases}}$$

ج) التحقق أن $F(4,6,0)$ **تنتمي إلى** (Δ) **:**

0.25

$(\Delta): \begin{cases} 4 = 2 + t \\ 6 = 4 + t \\ 0 = 2 - t \end{cases}$ **ومنه:** $(\Delta): \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ t **قيمة وحيدة ومنه** $F \in (\Delta)$

حساب حجم $FABC$ **:**

لدينا (Δ) **يشمل** F **و عمودي على** (ABC) **ويمر من** G **مركز ثقل** ABC **ومنه** G **المسقط العمودي لـ** F **على** (ABC)

إذن FG ارتفاع الهرم $FABC$ الذي قاعدته ABC

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A \times FG}$$

حساب A مساحة ABC : ليكن h ارتفاع المثلث ABC

$\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 + h^2 = (\sqrt{18})^2$ **ومنه :** $h = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$A = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$FG = \sqrt{(2-4)^2 + (4-6)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{3}$$

0.75

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 9}$$

4) إثبات أن $(FA) \perp (BC)$

0.25

$\vec{FA}(-1,-4,1)$ **و** $\vec{BC}(-3,0,-3)$

$\vec{FA}.\vec{BC} = 3 + 0 - 3 = 0$ **ومنه** $\vec{FA} \perp \vec{BC}$ **إذن** $(FA) \perp (BC)$

5)أ)**تعيين** (S) **مجموعة النقط** M : $\left\| \vec{MG} + \vec{MF} \right\| = 6$

لتكن I منتصف $[FG]$ ومنه $\left\| (1+1)\vec{MI} \right\| = 6$ أي $MI = 3$

0.5

(S) سطح كرة مركزها I و نصف قطرها $3 =$

ب)**الوضع النسبي بين** (S) و (ABC) :

نحسب إحداثيات I : $I(\frac{4+2}{2}, \frac{6+4}{2}, \frac{0+2}{2})$ **ومنه** $\boxed{I(3,5,1)}$

نحسب المسافة بين I و (ABC)

لدينا: $d(I,(ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

0.25

$d(I,(ABC)) \pi r$ إذن : (ABC) يقطع (S) وفق دائرة

التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{-x+1}{-x+3} + \ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to 3 \\ \pi}} g(x) = -\infty$

2) **اتجاه التغير:** $g'(x) = \frac{-2}{(-x+3)^2} - \frac{1}{(-x+3)}$

$\boxed{g'(x) = \frac{x-5}{(-x+3)^2}}$

0.5

x	$-\infty$ $\qquad$ 3
$x-5$	—

جدول تغيرات g

x	$-\infty$ $\qquad$ 3
$g'(x)$	—
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

0.5

3) **لدينا f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال [1,7 ; 1,5] وأيضا $f(1,5) \times f(1,7) < 0$**

لأن: $f(1,7) \approx -0,27$ **و** $f(1,5) \approx 0,07$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** $1,5 < \alpha < 1,7$

3) **إشارة** g :

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ 3
g	+ $\quad$ 0 $\quad$ -

0.25

II) $f(x) = (x-1)\ln(-x+3)$ ، $D_g =]-\infty;3[$

0.5

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to 3 \\ \pi}} f(x) = -\infty$

2) **اتجاه التغير:** $f'(x) = 1 \times \ln(-x+3) + (x-1) \times \frac{-1}{-x+3}$

0.5

$\boxed{f'(x) = g(x)}$

إشارة $f'(x)$ **نفس إشارة** $g(x)$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ 3
$f'(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ —
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ $-\infty$

0.5

إثبات أن $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$: **لدينا** $f(\alpha) = (\alpha-1)\ln(-\alpha+3)$

0.5

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ **ومنه:** $\frac{-\alpha+1}{-\alpha+3} + \ln(-\alpha+3) = 0$

ومنه: $\ln(-\alpha+3) = \frac{\alpha-1}{-\alpha+3}$ **إذن** : $f(\alpha) = (\alpha-1) \times \frac{(\alpha-1)}{-\alpha+3}$

0.5

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha}$$

حصر : $f(\alpha)$

$1,5 \pi \alpha \pi 1,7$ **إذن** $0,5 \pi \alpha - 1 \pi 0,7$ **ومنه** $\boxed{0,25 \pi (\alpha-1)^2 \pi 0,49}$

$-1,7 \pi -\alpha \pi -1,5$ **إذن** $1,3 \pi 3-\alpha \pi 1,5$ **ومنه** $\boxed{\frac{1}{1,5} \pi \frac{1}{3-\alpha} \pi \frac{1}{1,3}}$

ومنه : $\frac{0,25}{1,5} \pi \frac{(\alpha-1)^2}{3-\alpha} \pi \frac{0,49}{1,3}$ **ومنه** $\boxed{0.2 \pi f(\alpha) \pi 0.4}$

0.25

حل المعادلة $f(x) = 0$ **لدينا:** $(x-1)\ln(-x+3) = 0$

($x-1=0$ **أو** $\ln(-x+3)=0$) **ومنه** ($x=1$ **أو** $-x+3=e^0$)

$\boxed{x=1 \quad \text{أو} \quad x=2}$

إشارة : f

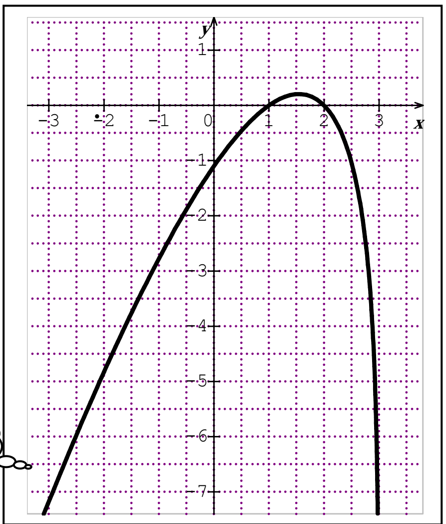
x	$-\infty$	1		2		3
$x-1$	-	0	+		+	
$\ln(-x+3)$	+		+	0	-	
f	-	0	+	0	-	

(4

0.25

$f(-2) = -3\ln 5 \approx -4,9$ **و** $f(-3) = -4\ln 6 \approx -7,2$

رسم : (C_f)



0.75

5) **إثبات أن** F **دالة أصلية للدالة** f

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})\ln(-x+3)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}) \times \frac{-1}{-x+3}$$

0.5

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + (x-1)\ln(-x+3) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$F'(x) = (x-1)\ln(-x+3) = f(x)$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

$A(3,4,0)$ $B(0,5,0)$ $C(0,0,5)$ $D(-2,-6,5)$
$E(-4;0;-3)$

1) التحقق أن النقط C,B,A **تعين مستو:**

$\vec{AB}(-3,1,0)$ و $\vec{AC}(-3,-4,5)$

لدينا $\left(\frac{-3}{-3} \neq \frac{-4}{1}\right)$ **ومنه** $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ **غير مرتبطان خطيا**

0.5

C,B,A **ليست على استقامية فهي تشكل المستوي** (ABC)

2) التحقق أن $\vec{n}(1;3;3)$ **ناظمي للمستوي** (ABC):

0.25

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{AB} = -3+3+0=0 \\ \vec{n}.\vec{AC} = -3-12+15=0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \text{ أي: } \vec{n} \perp (ABC)$$

ومنه $\vec{n}(1;3;3)$ **ناظمي للمستوي** (ABC)

معادلة (ABC): $x+3y+3z+d=0$

$A(3,4,0) \in (ABC)$ **أي:** $3+12+d=0$ **أي:** $d=-15$ **ومنه :**

$$\boxed{(ABC): x+3y+3z-15=0}$$

0.5

2) أ) إثبات أن AOB **متساوي الساقين:**

$OA = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

$OB = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$

0.5

$OA = OB$ **إذن** AOB **متساوي الساقين**

ب) حساب إحداثيات I منتصف $[AB]$

$I\left(\frac{3+0}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ **ومنه** $\boxed{I\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)}$

0.5

حساب OI:

0.25

$OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

حساب حجم $OABC$:

لدينا : $\vec{OC}(0,0,5)$ $\vec{OA}(3,4,0)$ $\vec{OB}(0,5,0)$

$$\begin{cases} \vec{OC}.\vec{OA} = 0 \\ \vec{OC}.\vec{OB} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \vec{OC} \perp \vec{OA} \\ \vec{OC} \perp \vec{OB} \end{cases} \text{ إذن } \vec{OC} \perp (AOB)$$

إذن OC ارتفاع الهرم $OABC$ الذي قاعدته AOB

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{A} \times OC$$

لدينا $OC = 5$

حساب A مساحة AOB: $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times OI \times AB$

1

ومنه: $AB = \sqrt{10}$ $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{10} = \frac{15}{2}$

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{V = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 5 = \frac{25}{2}}$

3) حساب المسافة بين O و (ABC):

0.25

لدينا: $d(O,(ABC)) = \frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1^2+3^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{19}} = \frac{15\sqrt{19}}{19}$

4) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

لدينا $\vec{DE}(-2,6,-8)$ و $E \in (DE)$

0.5

$$\boxed{(DE): \begin{cases} x = -4-2t \\ y = 6t \\ z = -3-8t \end{cases}}$$

ب) معادلة (Q) **المستوي المحوري للقطعة** $[DE]$:

ليكن H منتصف $[DE]$:

$H\left(\frac{-4-2}{2}, \frac{0-6}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ **ومنه** $\boxed{H(-3,-3,1)}$

(Q) **يشمل** H **وشعاعه الناظمي** $\vec{DE}(-2,6,-8)$:

معادلته : $-2x+6y-8z+d=0$

$H \in (Q)$ **أي:** $6-18-8+d=0$ **أي:** $d=20$ **ومنه :**

$(Q): -2x+6y-8z+20=0$

1

$$\boxed{(Q): x-3y+4z-10=0}$$

ج) التحقق أن $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right) \in Q$:

0.25

$-1-3+\frac{28}{2}-10=0$ **إذن** $0=0$ **ومنه** $F \in Q$

3) استنتاج المسافة بين F **و المستقيم** (DE):

$$\boxed{d(F,(DE)) = FH}$$

$$FH = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3-1)^2 + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2}$$

0.5

$$\boxed{FH = \sqrt{4+16+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}}$$

التمرين الثاني :

$$Z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}Z + 1 - i$$

1) S **تشابه مباشر نسبته** 2 **و زاويته** $\frac{-\pi}{3}$ **ومركزه** W

لدينا: $2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}))$

0.75

$$2e^{\frac{-\pi}{3}i} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt3}{2}) = 1 - i\sqrt3$$

$$Z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt3} = \frac{(1-i)i\sqrt3}{i\sqrt3(i\sqrt3)}$$

$$Z_W = \frac{1-i}{1-1+i\sqrt3} = \frac{(1-i)(-i\sqrt3)}{i\sqrt3(-i\sqrt3)} = \frac{-\sqrt3}{3} - \frac{\sqrt3}{3}i$$

$$W(\frac{-\sqrt3}{3};\frac{-\sqrt3}{3})$$

تعيين لواحق A', B', C' **بالتشابه** S :

$$Z' = (1-i\sqrt3)Z + 1 - i$$

اي $S(A)=A'$ $\quad Z_{A'} = (1-i\sqrt3)Z_A + 1 - i$

0.25 $\boxed{Z_{A'} = 1+\sqrt3}$ ومنه $Z_{A'} = (1-i\sqrt3)i + 1 - i$

اي $S(B)=B'$ $\quad Z_{B'} = (1-i\sqrt3)Z_B + 1 - i$

$$Z_B = \sqrt2(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

$$Z_B = \sqrt2(\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}) = 1-i$$

$$Z_{B'} = (1-i\sqrt3)(1-i) + 1 - i$$

$$Z_{B'} = 1 - i - i\sqrt3 - \sqrt3 + 1 - i$$

0.25 $\boxed{Z_{B'} = (2-\sqrt3) - (2+\sqrt3)i}$

اي $S(C)=C'$ $\quad Z_{C'} = (1-i\sqrt3)Z_C + 1 - i$

$\boxed{Z_{C'} = (\sqrt3-1)i}$ ومنه $Z_{C'} = (1-i\sqrt3)(-1) + 1 - i$

3) أ) G **مرجح الجملة :** $\{(A;3),(B;1),(C;-2)\}$

0.25

$$Z_G = \frac{3Z_A + Z_B - 2Z_C}{3+1-2} = \frac{3i+1-i-2(-1)}{2}$$

0.5 $\boxed{Z_G = \frac32 + i}$

ب) G' **مرجح الجملة :** $\{(A';3),(B';1),(C';-2)\}$

$$Z_{G'} = \frac{3Z_{A'} + Z_{B'} - 2Z_{C'}}{3+1-2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3(1+\sqrt3) + 2 - \sqrt3 + (-2-\sqrt3)i - 2(\sqrt3-1)i}{2}$$

$$Z_{G'} = \frac{3+3\sqrt3+2-\sqrt3-2i-\sqrt3 i-2\sqrt3 i+2i}{2}$$

0.5

ج) $S(G)=G'$ ومنه $Z_{G'} = (1-i\sqrt3)Z_G + 1 - i$

$$Z_{G'} = (1-i\sqrt3)(\frac32+i) + 1 - i$$

$$Z_{G'} = \frac32 + i - \frac{3\sqrt3}{2}i + \sqrt3 + 1 - i$$

0.5 $\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt3}{2} - i\frac{3\sqrt3}{2}}$

الاستنتاج: التشابه المباشر يحافظ عل المرجح

4) أ) **إثبات أن** $\vec{GM'} = \vec{MG}$

$\vec{MM'} = 3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ حسب علاقة شال

$$\vec{MG} + \vec{GM'} = 3(\vec{MG}+\vec{GA}) + \vec{MG} + \vec{GB} - 2(\vec{MG}+\vec{GC})$$

$$\vec{GM'} = (3+1-2-1)\vec{MG} + \underbrace{3\vec{GA}+\vec{GB}-2\vec{GC}}_{\vec0}$$

0.5

ومنه : $\vec{GM'} = \vec{MG}$ إذن $\vec{GM'} = -\vec{GM}$

0.25 **التحويل تحاكي مركزه** G **ونسبته 1- (تناظر مركزه** G **)**

ب) **تعيين لواحق** D, E, F **صور** A, B, C **بالتحاكي** $T(G;-1)$:

الكتابة المركبة لتحاكي: $Z' - Z_G = -(Z - Z_G)$

$T(A)=D$ **ومنه :** $Z_D - Z_G = -(Z_A - Z_G)$

$$Z_D = -Z_A + 2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_D = 3+i}$ **ومنه:** $Z_D = -i + 2(\frac32+i) = 3+i$

$T(B)=E$ **ومنه :** $Z_E - Z_G = -(Z_B - Z_G)$

$$Z_E = -Z_B + 2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_E = 2+3i}$ **ومنه** $Z_E = -(1-i) + 2(\frac32+i)$

$T(C)=F$ **ومنه :** $Z_F - Z_G = -(Z_C - Z_G)$

$$Z_F = -Z_C + 2Z_G$$

0.25 $\boxed{Z_E = 4+2i}$ **ومنه** $Z_F = -(-1) + 2(\frac32+i)$

أ) **إثبات أن المثلثين** ABC و EDF **متقايسان :**

لدينا: $T(A)=D$ و $T(B)=E$ و $T(C)=F$

المثلث EDF صورة المثلث ABC بالتحاكي T الذي يضرب الأطوال في $|K|$ حيث ($k=-1$ نسبة التحاكي) ومنه :

$$ED = |-1|BA = BA$$

0.5 $EF = |-1|BC = BC$

$$DF = |-1|AC = AC$$

ومنه ABC و EDF متقايسان

$$\boxed{Z_{G'} = \frac{5+2\sqrt{3}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

التمرين الثالث: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$ ، $D_g=\Re$

0.5

1) **النهايات:**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=-\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\lim(xe^{-x}-e^{-x}+2)=2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$

0.5

حساب المشتق:

$g'(x)=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})$ **ومنه** $\boxed{g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

اشارة المشتق:

0.5

$g'(x)=0$ أي $2-x=0$ **ومنه** $x=2$

إشارة $g'(x)$ **من إشارة** $2-x$ **لأن** $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0

2)جدول تغيرات g:

0.5

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$2+e^{-2}$	↘ **2**

2) تعليل وجود **عدد** $-0.38<\alpha<-0.36$ **يحقق** $g(\alpha)=0$:

لدينا g **مستمرة ومتناقصة تماما على المجال** $[-0.38;-0.36]$

وأيضا $g(-0{,}36)\times g(-0{,}38)<0$

0.75

لأن: $g(-0{,}38)\approx-0{,}02$ **و** $g(-0{,}36)\approx 0{,}05$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** $-0.38<\alpha<-0.36$

استنتاج إشارة $g(x)$:

0.5

x	$-\infty$	α	**3**
g	**−**	**0**	+

0.25

(II $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، $D_f=\Re$

(1 $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ **و** $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}=0$

استنتاج إشارة $f'(x)$:

0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	**3**
f'	**−**	**0**	+

0.5

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

ب) إثبات أن $f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$

و $g(\alpha)=0$ **ومنه** $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ **إذن** $e^{-\alpha}=\frac{-2}{\alpha-1}$

ومنه $$f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

0.5

لكن : $$\frac{2\alpha}{\alpha-1}=2+\frac{2}{\alpha-1}$$

ومنه: $$f(\alpha)=2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}$$

حصر $f(\alpha)$: $-0{,}38<\alpha<-0{,}36$

$$2(-0{,}38)+3<2\alpha+3<2(-0{,}36)+3$$

$$\boxed{2{,}24<2\alpha+3<2{,}28}$$

0.25

ولدينا : $-1{,}38<\alpha-1<-1{,}36$

ومنه $$\boxed{\frac{2}{-1{,}36}<\frac{2}{\alpha-1}<\frac{2}{-1{,}38}}$$

$$2{,}24-\frac{2}{1{,}36}<2\alpha+3+\frac{2}{\alpha-1}<2{,}28-\frac{2}{1{,}38}$$

$$\boxed{0{,}77<f(\alpha)<0{,}83}$$

3) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا : $f'(x)=g(x)$

ومنه : $\boxed{f''(x)=g'(x)=(2-x)e^{-x}}$

0.5

إشارة $f''(x)$ **من إشارة** $2-x$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−

$f''(x)$ تنعدم عند 2 مغيرة إشارتها ومنه النقطة

$B(2;f(2))$ أي $B(2;5-2e^{-2})$ **نقطة انعطاف**

2)أ)تبيان أن $f'(x)=g(x)$

0.25

$$f'(x)=2-e^{-x}-x(-e^{-x})$$

$$f'(x)=(x-1))e^{-x}+2=g(x)$$

4) أ) إثبات أن $(\Delta): y=2x+1$ **مقارب مائل لـ** (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) **عند** $+\infty$ 0.25

دراسة الوضع النسبي (C_f) و (Δ):

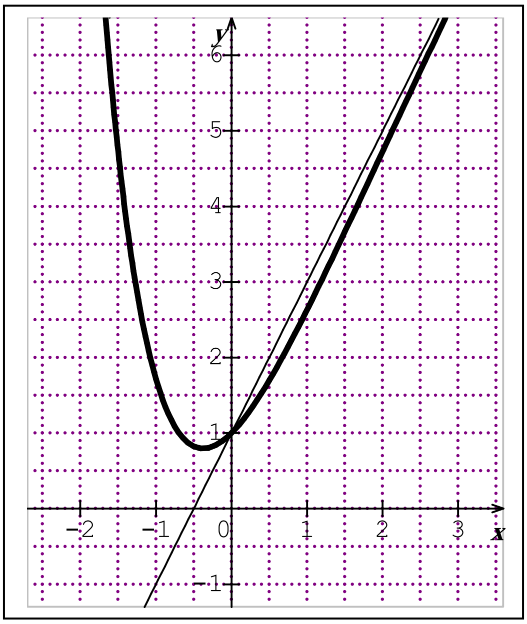
$$\boxed{f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x$ 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة الفرق	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (Δ)		(C_f) **تحت** (Δ)

$$(C_f)\cap(\Delta)=\{(0;1)\}$$

رسم (C_f):



0.5

5) حساب مشتق h: $h(x)=f(x^2e^x)$

$$h'(x)=(x^2e^x)'\times f'(x^2e^x)$$

لدينا: $(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$

ومنه: $h'(x)=(2x+x^2)e^x\times f'(x^2e^x)$

لدينا: $f'(x)=g(x)$ ومنه : $f'(x^2e^x)=g(x^2e^x)$

ومنه : $\boxed{h'(x)=(2x+x^2)e^x\times g(x^2e^x)}$ 0.5

إشارة $h'(x)$:

من إشارة $2x+x^2$ **لأن** $e^x \succ 0$ و $g(x^2e^x)\succ 0$

(لاحظ جدول إشارة g **على المجال** $]0;+\infty[$)

$2x+x^2=0$ أي $x(x+2)=0$ **ومنه** : $x=0$ أو $x=-2$

0.25

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^2+2x	$+$	0 $-$	0	$+$
$h'(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$

جدول تغيرات h: 0.5

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$
$h(x)$	1 ↗	$h(-2)$ ↘	1 ↗	$+\infty$

6) لدينا $k(x)=(ax+b)e^{-x}$

أ) **تعيين العددين** a و b:

بما أن k **دالة أصلية للدالة** $x\to -xe^{-x}$ **فإن** :

$$k'(x)=-xe^{-x}$$

$$k'(x)=ae^{-x}+(ax+b)(-e^{-x})$$

$$k'(x)=(-ax+a-b)e^{-x}$$

ومنه: $(-ax+a-b)e^{-x}=-xe^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=-1\\ a-b=0\end{cases}$ **ومنه** $\boxed{\begin{cases}a=1\\ b=a=1\end{cases}}$ 0.5

إذن : $\boxed{k(x)=(x+1)e^{-x}}$

ب) **إستنتاج دالة أصلية للدالة** f :

$$f(x)=2x+1-xe^{-x}$$

ومنه دالة أصلية للدالة f **على** $\Re$ **هي** : 0.5

$$\boxed{F(x)=x^2+x+(x+1)e^{-x}}$$