## التمرين 1 (04)

1) $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ ; $u_0 = 2$

$u_1 = \frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 0 + 1$

$u_1 = \frac{7}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}\times \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\times 1 + 1$

$u_2 = \frac{26}{9}$ (0.5)

$u_3 = \frac{2}{3}\times \frac{26}{9} + \frac{1}{3}\times 2 + 1$

$u_3 = \frac{97}{27}$

التخمين: $(u_n)$ متزايدة

ب) البرهان أن $u_n \le n+3$

• التحقق من أجل $n=0$

$u_0 \le 0+3$ ; $2 \le 3$ (محققة)

• نفرض صحة الخاصية من أجل $n$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

$u_n \le n+3$ (معطى)

$u_{n+1} \le (n+1)+3$ (المطلوب)

من $u_n \le n+3$

ينتج $\frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}(n+3)$

ومنه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \le \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$

$u_{n+1} \le (n+1)+2$

ولكن $(n+1)+2 \le (n+1)+3$

إذن $u_{n+1} \le (n+1)+3$

وهو المطلوب

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$

$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

ولكن حسب السؤال 2) $n+3-u_n \ge 0$ (0.5)

إذن $u_{n+1} - u_n \ge 0$

ومنه $(u_n)$ متزايدة

4-) $v_n = u_n - n$

$v_0 = u_0 - 0$ , $v_0 = 2$

أ) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}(v_n + n) + \frac{1}{3}n - n$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

إذن $(v_n)$ م.ه أساسها $q = \frac{2}{3}$

ب) $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$u_n = v_n + n$

$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

ج) $\lim u_n = +\infty$

$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{2}{3} < 1\right)$

5) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$S_n = (v_0+0) + (v_1+1) + (v_2+2) + \dots + (v_n+n)$

$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (0+1+2+\dots+n)$

$S_n = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \left(\frac{n+1}{2}\right)(n)$

$S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$T_n = \frac{S_n}{n}$

$T_n = \frac{6}{n}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{2}(n+1)$

$\lim T_n = +\infty$

التمرين 4

1) $(P): x+y-z-3=0$

$2+1+0-3=0 \quad A\in(P)$

$2-1+2-3=0 \quad B\in(P)$

$0+1+2-3=0 \quad C\in(P)$

2) أ) $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

$(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4+1+4-5$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$

إذن $R=2 \quad I(2,1,-2)$

ب) $d(I,(P)) = \frac{|2+1-2-3|}{\sqrt{3}}$

$d(I,(P)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$d(I,(P)) < 2$

إذن $(S)\cap(P) = (C)$

تبيان $A, B$ و $C$ نقط من $(C)$

$(2-2)^2+(1-1)^2+(0+2)^2=4 \quad A\in(S)$

$(2-2)^2+(-1-1)^2+(-2+2)^2=4 \quad B\in(S)$

$(0-2)^2+(1-1)^2+(-2+2)^2=4 \quad C\in(S)$

إذن $(C)$ محيطة بالمثلث $ABC$

ج) $AB^2=(2-2)^2+(1+1)^2+2^2=8$

$AC^2=(2-0)^2+(1-1)^2+(0+2)^2=8$

$BC^2=(2-0)^2+(-1-1)^2+(-2+2)^2=8$

إذن $ABC$ متقايس الأضلاع.

3) أ) $(\Delta)$ يشمل $I$ و عمودي على $(P)$

$\vec{n_P}(1,1,-1) \quad I(2,1,-2)$

$(\Delta): \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=-t-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

ب) $\{G\} = (P)\cap(\Delta)$

$(t+2)+(t+1)-(-t-2)-3=0$

$3t+2=0 \quad t=-\frac{2}{3}$

$G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

ج) $x=\frac{2+2+0}{3}=\frac{4}{3}$

$y=\frac{1-1+1}{3}=\frac{1}{3}$

$z=\frac{0-2-2}{3}=-\frac{4}{3}$

إذن $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$

مركز الدائرة $(C)$ هو $G$

و نصف قطرها

$r=\sqrt{R^2-d^2}$

$r=\sqrt{4-\frac{4}{3}} \quad r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

التمرين 3 (05 ن)

1)
$$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$$
$$\Delta = 64\times 3 - 4\times 64$$
$$\Delta = -64 = (i8)^2$$
$$z_1 = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2}, \quad z_1 = 4\sqrt{3}-4i$$
$$z_2 = 4\sqrt{3}+4i$$

2) أ)
$$z_A = 4\sqrt{3}-4i$$
$$z_A = 4(\sqrt{3}-i)$$
$$|\sqrt{3}-i| = 2 \qquad \begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{1}{2}\end{cases} \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$
$$z_A = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ب)
$$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}\right)^n$$
$$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{3}}$$

حقيقي يعني $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$

$$\frac{n\pi}{3} = k\pi, \quad k\in\mathbb{N}$$
$$n = 3k, \quad k\in\mathbb{N}$$

جـ) 2015 ليس مضاعف للعدد

إذن $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{2015}$ غير حقيقي

د) بما أن $z_A$ و $z_B$ مترافقان
كان $B$ نظيرة $A$ بالنسبة لمحور الفواصل
ومنه $OAB$ متساوي الساقين

$$\frac{z_B}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

إذن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع

3-
$$r: M(z) \longmapsto M'(z')$$
$$z' = e^{-\frac{\pi}{3}i}z$$

4-
$$z_D = e^{-\frac{\pi}{3}i}z_C$$
$$z_C = -\sqrt{3}+i = -(\sqrt{3}-i)$$
$$z_C = 2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\pi)}$$
$$z_C = 2e^{i(\frac{5\pi}{6})}$$
$$z_D = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}\times e^{i(\frac{5\pi}{6})}$$
$$z_D = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad z_D = 2i$$

ب-
$$z_G = \frac{-1\times 0 + 2i + 4\sqrt{3}+4i}{-1+1+1}$$
$$z_G = 4\sqrt{3}+6i$$

جـ-
$$z_G - z_D = 4\sqrt{3}+6i-2i$$
$$z_G - z_D = 4(\sqrt{3}+i)$$
$$z_C - z_D = -\sqrt{3}+i-2i$$
$$z_C - z_D = -\sqrt{3}-i$$
$$z_G - z_D = -4(z_C - z_D)$$

إذن النقط $D, G, C$ في استقامية -

د-
$$-|z|^2 + |z-z_A|^2 + |z-z_B|^2 = 20$$
$$-OM^2 + AM^2 + BM^2 = 20$$
$$-OG^2 + AG^2 + BG^2 = 20$$
$$(-1+1+1)MG^2 - OG^2 + AG^2 + BG^2 = 20$$
$$MG^2 = 20 + |z_G|^2 - |z_G - z_A|^2 - |z_G - z_B|^2$$

3.5

التمرين 3 (05 ن)

1) $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

$\Delta=64\times3-4\times64$

$\Delta=-64=(i8)^2$

$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}$ , $z_1=4\sqrt{3}-4i$

$z_2=4\sqrt{3}+4i$

2) أ

$z_A=4\sqrt{3}-4i$

$z_A=4(\sqrt{3}-i)$

$|\sqrt{3}-i|=2$ $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\theta=-\frac{\pi}{6}$

$z_A=8e^{-i\pi/6}$ , $z_B=8e^{i\pi/6}$

ب) $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\left(\frac{e^{i\pi/6}}{e^{i\pi/6}}\right)^n$

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=e^{in\frac{\pi}{3}}$

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقي يعني

$\frac{n\pi}{3}=k\pi$ , $k\in\mathbb{N}$

$n=3k$ , $k\in\mathbb{N}$

ج) 2015 ليس مضاعف للعدد 3

إذن $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{2015}$ غير حقيقي

د) بما أن $z_A$ و $z_B$ مترافقان

كان B نظيرة A بالنسبة لمحور الفواصل

ومنه OAB متساوي الساقين

$\frac{z_B}{z_A}=e^{i\pi/3}$

إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع

3- $r: M(z)\longmapsto M'(z')$

$z'=e^{-\frac{\pi}{3}i}z$

4- $z_D=e^{-\frac{\pi}{3}i}z_C$

$z_C=-\sqrt{3}+i=-(\sqrt{3}-i)$

$z_C=2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\pi)}$

$z_C=2e^{i(5\pi/6)}$

$z_D=2e^{-\frac{\pi}{3}i}\times e^{i(5\pi/6)}$

$z_D=2e^{i\pi/2}$ $z_D=2i$

ب- $z_G=\frac{-1\times0+2i+4\sqrt{3}+4i}{-1+1+1}$

$z_G=4\sqrt{3}+6i$

ج- $z_G-z_D=4\sqrt{3}+6i-2i$

$z_G-z_D=4(\sqrt{3}+i)$

$z_C-z_D=-\sqrt{3}+i-2i$

$z_C-z_D=-\sqrt{3}-i$

$z_G-z_D=-4(z_C-z_D)$

إذن النقط D, G, C في استقامية.

د- $-|z|^2+|z-z_A|^2+|z-z_B|^2=20$

$-OM^2+AM^2+BM^2=20$ , $-OG^2+AG^2+BG^2=20$

$(-1+1+1)MG^2-OG^2+AG^2+BG^2=20$

$MG^2=20+|z_G|^2-|z_G-z_A|^2-|z_G-z_B|^2$

$|3G|^2 = 16\times 3 + 36 = 84$

$|3G-3A|^2 = |4\sqrt{3}+6i-4\sqrt{3}+4i|^2$

$|3G-3A|^2 = 100$

$|3G-3B|^2 = |4\sqrt{3}+6i-4\sqrt{3}-4i|$

$= 4$

$MG^2 = 20+84-100-4$

$MG^2 = 0$

$S = \{G\}.$

4,0

المسألة:

$g$ معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1• دراسة تغيرات $g$

• النهايات:

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x+2)=+\infty$

و $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$

$=1.$

• اتجاه التغير

$g'(x)=-\left[(2x-2)e^{-x}-e^{-x}(x^2-2x+2)\right]$

$g'(x)=(x^2-4x+4)e^{-x}$

$g'(x)=(x-2)^2e^{-x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $1$ |

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

$g$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(0,35)\times g(0,36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,35<\alpha<0,36$

0,5

إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

II) $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$$f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$$

1) دراسة تغيرات الدالة $f$

• النهايات:

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(xe^{x}+e^{x}+x^2+2)$

$=+\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$

$=+\infty$

• اتجاه التغير

$f'(x)=1+2xe^{-x}-e^{-x}(x^2+2)$

$f'(x)=1-e^{-x}(x^2-2x+2)$

$f'(x)=g(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) تبيان أن $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

لدينا $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$.

و لكن $g(\alpha)=0$

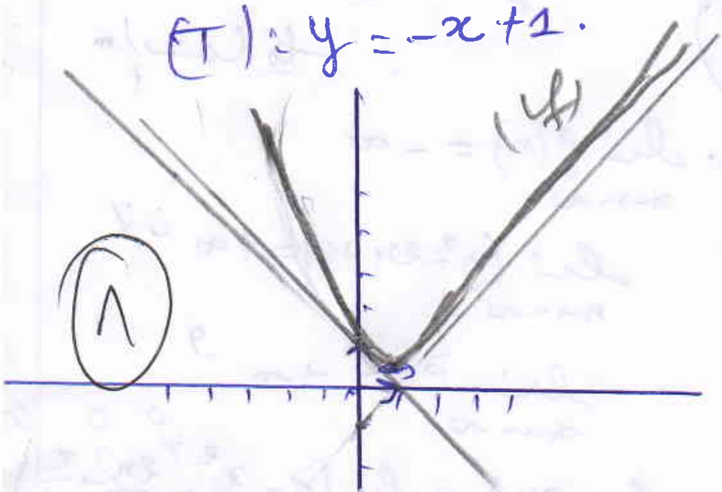
$1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$

$(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=1$

4) كتابة معادلة ديكارتية لـ $(T)$
$0,25$ مماس لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة

$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y = -x+1.$



5) تعيين $a, b$ و $c$ حتى تكون $F$ دالة أصلية للدالة $h$
$0,5$ على $\mathbb{R}$ حيث $h(x)=(x^2+2)e^{-x}$

و $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$

$F'(x) = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$

و لكن $F'(x) = h(x)$

بالمقارنة

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$$

$0,5$ $F(x) = (-x^2-2x-4)e^{-x}.$

6) $A(\alpha) = \left(\int_{-\alpha}^{0}(x^2+2)e^{-x}dx\right)\times 4cm^2$

$= \left[(-x^2-2x-4)e^{-x}\right]_{-\alpha}^{0}\times 4cm^2$

$A(\alpha) = 4(-4-(-\alpha^2+2\alpha-4)e^{\alpha}) = -4+(\alpha^2-2\alpha+2)e^{\alpha}$

$g(\alpha)=0 \to e^{\alpha} = \alpha^2-2\alpha+2$

$0,25$ $A(\alpha) = (-4+(e^{\alpha}+2)e^{\alpha})4$ : التبسيط $\longrightarrow A(\alpha) = 4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$

$f(\alpha) = \alpha - (\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha} + (\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha + e^{-\alpha}(\alpha^2+2-\alpha^2+2\alpha-2)$

$f(\alpha) = \alpha + e^{-\alpha}2\alpha$

$= \alpha(1+2e^{-\alpha})$

حصر $f(\alpha)$

$0,25$

$0,35 < \alpha < 0,36 \longrightarrow (1)$

$-0,36 < -\alpha < -0,35$

$e^{-0,36} < e^{-\alpha} < e^{-0,35}$

$(1+e^{-0,36}) < 1+e^{-\alpha} < 1+e^{-0,35}$

$(0,35)(1+e^{-0,36}) < \alpha(1+e^{-\alpha}) < 0,36(1+e^{-0,35})$

$0,59 < f(\alpha) < 0,60.$

3) اثبات أن $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x-1$ مقارب لـ $(C_f)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$

$= 0$

$0,25$ إذن $(\Delta)$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$

• دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$

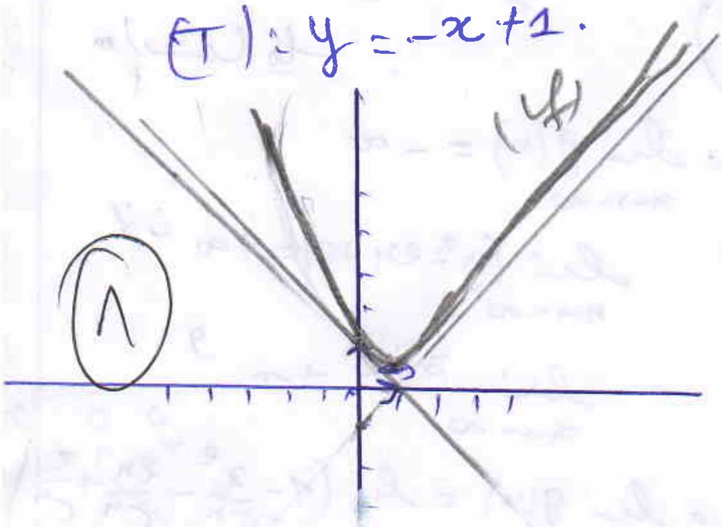
$0,25$ $f(x)-(x-1) = (x^2+2)e^{-x}.$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)-(x-1)$ | $+$ |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

4) كتابة معادلة ديكارتية لـ (T) مماس لـ (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة 0 (0,25)

$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y = -x+1.$



(1)

5) تعيين a, b و c حتى تكون F دالة أصلية للدالة h (0,5)

على IR حيث $h(x)=(x^2+2)e^{-x}$

و $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$

$F'(x) = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$

و لكن $F'(x)=h(x)$

بالمقارنة

$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$

(0,5) $F(x)=(-x^2-2x-4)e^{-x}.$

6) $A(\alpha)=\left(\int_{\alpha}^{0}(x^2+2)e^{-x}dx\right)\times 4cm^2$

$= \left[(-x^2-2x-4)e^{-x}\right]_{\alpha}^{0} \times 4cm^2$

$A(\alpha)=4(-4-(-\alpha^2-2\alpha-4)e^{-\alpha}) = -4+(\alpha^2+2\alpha+4)e^{-\alpha}$

$g(\alpha)=0 \rightarrow e^{\alpha}=\alpha^2-2\alpha+2$

(0,25) $A(\alpha)=(-4+(e^{\alpha}+2)e^{\alpha})4$ : النتيجة $\longrightarrow A(\alpha)=4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$

$f(\alpha)=\alpha-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$

$f(\alpha)=\alpha+e^{-\alpha}(\cancel{\alpha^2}+2-\cancel{\alpha^2}+2\alpha-2)$

$f(\alpha)=\alpha+e^{-\alpha}2\alpha$

$=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

حصر $f(\alpha)$

(0,25)

$0,35<\alpha<0,36$ —— (1)

$-0,36<-\alpha<-0,35$

$e^{-0,36}<e^{-\alpha}<e^{-0,35}$

$(1+e^{-0,36})<1+e^{-\alpha}<1+e^{-0,35}$

$(0,35)(1+e^{-0,36})<\alpha(1+e^{-\alpha})<0,36(1+e^{-0,35})$

$0,59<f(\alpha)<0,60.$

3) تبيان أن (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لـ (Cf)

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$ لدينا

$=0$

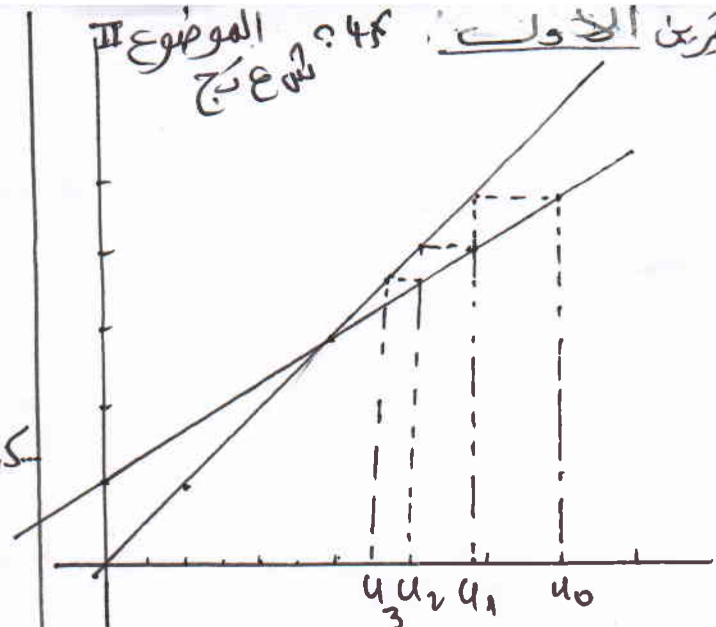
(0,25) إذن (Δ) مقارب لـ (Cf) بجوار $+\infty$

• دراسة وضعية (Cf) بالنسبة لـ (Δ)

(0,25) $f(x)-(x-1)=(x^2+2)e^{-x}.$

| $x$ | $-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)-(x-1)$ | + |
| الوضع | (Cf) فوق (Δ) |

التمرين الأول : الموضوع II ؟4ج ش ع ت ج




0,5

ب/ المتتالية $(U_n)$ متناقصة تماما ومتقاربة.

0,5 د/ البرهان بالتراجع.

• [من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $U_n > 3$] $p(n)$

• $p(0)$ محققة.

• نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن $p(n+1)$ صحيحة

$U_n > 3$

0,5 $\frac{2}{3}U_n > 2$

$\frac{2}{3}U_n + 1 > 3$

$U_{n+1} > 3$

$p(n+1)$ صحيحة معناه $p(n)$ صحيحة.

ع/ إتجاه تغير المتتالية $(U_n)$

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + 1 - U_n = -\frac{1}{3}U_n + 1$

$U_n > 3$

0,5 $-\frac{1}{3}U_n < -1$

$-\frac{1}{3}U_n + 1 < 0$

$U_{n+1} - U_n < 0$

ومنه $(V_n)$ متناقصة تماما.

0,25 . بما أنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

ع) $V_n = 2^n \times 3^{1-n}$

$(V_n)$ هندسية،

0,5 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1} \times 3^{-n}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2}{3}$

حدها الأول $v_0 = 3$

ب) برهن أنه [من أجل كل $n$ : $v_n = U_n - 3$] $p(n)$

$v_0 = U_0 - 3$ محققة

• نفرض $p(n)$ صحيحة نبرهن $p(n+1)$ صحيحة

$v_n = U_n - 3$

0,5 $v_{n+1} = U_{n+1} - 3$ / $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

بالتعويض نجد المطلوب

0,25 $v_n = U_n - 3$ معناه $\ln U_n > 3$

ج) $w_n = \ln v_n$

$w_n = \ln v_n = \ln 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \ln 3 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$

0,25x2 $= \underbrace{\ln 3}_{w_0} + n \underbrace{\ln\frac{2}{3}}_{r}$

$S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{u_n}{v_n}$

$S_n = \frac{v_0+3}{v_0} + \frac{v_1+3}{v_1} + \cdots - \frac{v_n+3}{v_n}$

$= 1 + \frac{3}{v_0} + 1 + \frac{3}{v_1} + \cdots + 1 + \frac{3}{v_n}$

$= (n+1) + 3\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)$

0,5 $= (n+1) + 3\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 \times q} + \cdots + \frac{1}{v_0 \times q^n}\right)$

$= (n+1) + 3\frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{\cdot} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^n}\right)$

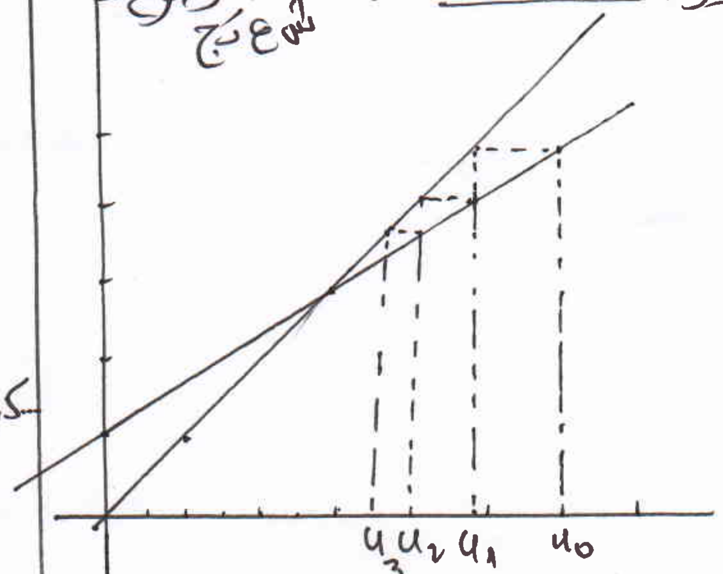
$= (n+1) + \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$

$= n+1 + \frac{1}{1-\frac{3}{2}}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$

$= (n+1) - 2\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$.

$= n - 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

التمرين الأول: الموضوع II ش ع ت ج 4f ؟




0,5

0,5 ب/ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ومتقاربة.

ح/ البرهان بالتراجع.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n > 3$ ] $p(n)$

• $p(0)$ محققة.

• نفرض $p(n)$ صحيحة ونبرهن $p(n+1)$ صحيحة

$u_n > 3$

0,5 $\frac{2}{3}u_n > 2$

$\frac{2}{3}u_n + 1 > 3$

$u_{n+1} > 3$

$p(n+1)$ صحيحة معناه $p(n)$ صحيحة.

ء/ إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 1$

$u_n > 3$

0,5 $-\frac{1}{3}u_n < -1$

$-\frac{1}{3}u_n + 1 < 0$

$u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه $(u_n)$ متناقصة تماما.

0,25 بما أنها متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2) $v_n = 2^n \times 3^{1-n}$

$(v_n)$ هندسية،

0,5 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1} \times 3^{-n}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2}{3}$

حدها الأول $v_0 = 3$

ب/ برهن أنه من أجل كل $n$ : $v_n = u_n - 3$ ] $p(n)$

$v_0 = u_0 - 3$ محققة

• نفرض $p(n)$ صحيحة نبرهن $p(n+1)$ صحيحة

$v_n = u_n - 3$

0,5 $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ / $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

بالتعويض نجد المطلوب

0,25 $v_n = u_n - 3$ معناه $\ln u_n > 3$ o

ج) $w_n = \ln v_n$

$w_n = \ln v_n = \ln 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \ln 3 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$

0,25x2 $= \underbrace{\ln 3}_{w_0} + n\underbrace{\ln\frac{2}{3}}_{r}$

$S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

$S_n = \frac{v_0+3}{v_0} + \frac{v_1+3}{v_1} + \dots - \frac{v_n+3}{v_n}$

$= 1 + \frac{3}{v_0} + 1 + \frac{3}{v_1} + \dots + 1 + \frac{3}{v_n}$

$= (n+1) + 3\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}\right)$

0,5 $= (n+1) + 3\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 \times q} + \dots + \frac{1}{v_0 \times q^n}\right)$

$= (n+1) + 3\frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^n}\right)$

$= (n+1) + \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$

$= n+1 + \frac{1}{1-\frac{3}{2}}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$

$= (n+1) - 2\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$.

$= n - 1 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

## التمرين الثاني: (4 نقاط)

(0,25)×2 1 - لدينا $\vec{AB}(1;-2;-5)$ و $\vec{AC}(2;-1;-4)$ ..........

0,25 بما أن $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$ فإن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

وبالتالي النقط A، B و C ليست في استقامية.

2 - أ - $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) معناه $\begin{cases} \vec{u}.\vec{AB}=0 \\ \vec{u}.\vec{AC}=0 \end{cases}$ (0,25)

أي $\begin{cases} 1-2b-5c=0 \\ 2-b-4c=0 \end{cases}$ ومنه نجد $\boxed{b=-2 \text{ و } c=1}$ ..... (0,25)×2

ب - معادلة المستوى (ABC) من الشكل: $x-2y+z+d=0$

لأن $B\in(ABC)$ فإن $2+2+d=0$ ومنه $d=-4$

إذن $x-2y+z-4=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ..... (0,25)

جـ - $D\in(ABC)$ معناه $3+12-1-4=0$

أي $10=0$ غير محققة ........ (0,25)

ومنه D لا تنتمي الى المستوي (ABC).

3 - أ - شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{v}(2;-4;2)$

و $\vec{u}(1;-2;1)$ الشعاع الناظمي للمستوى (ABC) ..... (0,5)

لدينا $\vec{v}=2\vec{u}$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا

وبالتالي المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC).

ب - تعيين احداثيات H نقطة تقاطع (Δ) والمستوى (ABC)

لدينا $2t+3+8t-10+2t-1-4=0$

أي $12t-12=0$

ومنه $\boxed{t=1}$ ........ (0,25)

وبالتالي $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ إذن $H(5;1,1)$ ........ (0,5)

4 - وضعية المستقيم (DE) بالنسبة إلى المستوي (ABC).

لدينا $\vec{DE}(1;-2;-5)$ و $\vec{u}(1;-2;1)$ (0,25)

لدينا $\vec{u}.\vec{DE}=0$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{DE}$ متعامدان وبالتالي (Δ) يوازي (ABC). (0,25)×2

## التمرين الثالث

1-أ) حساب $P(-1) = 0$

$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

بالمطابقة أو القسمة الإقليدية نجد

$a = -4 \, , \, b = 7$

ونكتب $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$

0,75

ب) حل المعادلة $P(z) = 0$

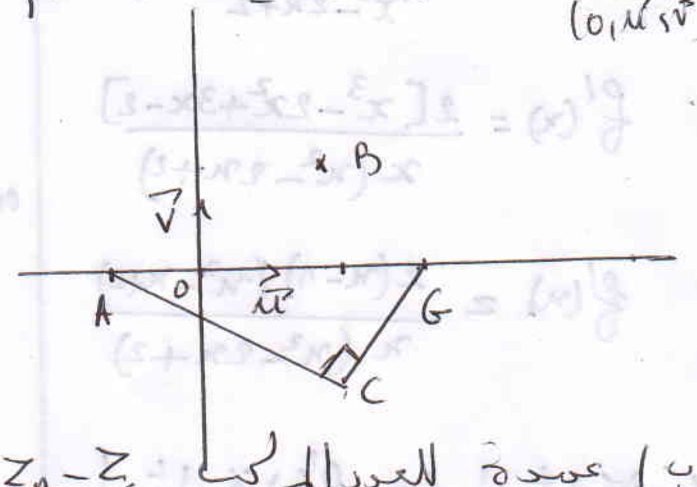
معناه $z_0 = -1$ أو $z^2 - 4z + 7 = 0$

$\Delta' = -3 = (\sqrt{3}\,i)^2$

ومنه الحلين هما $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ ; $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$

2) أ) التمثيل البياني في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1




ب) عمدة للعدد المركب $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$\arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \arg(z_A - z_C) - \arg(z_G - z_C)$

$= \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \; . \; k \in \mathbb{Z}$

0,75

ومنه المثلث $ACG$ قائم في $C$

لأن $(\vec{CG}, \vec{CA}) = \dfrac{\pi}{2}$

- مساحة المثلث $ACG$ هي $S$

0,25

$S = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{AC \cdot CG}{2}$

$z_{\vec{AC}} = 3 - i\sqrt{3}$  $AC = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$z_{\vec{CG}} = 1 + i\sqrt{3}$  $CG = \sqrt{1+3} = 2$

$S = \dfrac{2 \times \sqrt{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2}}$

$S = 2\sqrt{3} \; u.a = 2 \times 4\sqrt{3} \; cm^2$

3) 1) أ) إثبات أن G مرجح الجملة

$\{(A,-1);(B,2);(C,2)\}$

0,25

معناه $-\vec{GA} + 2\vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$

$4 - 2 + 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3} = 0$

ب) مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث

$(-\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot \vec{CG} = 12$

تكافئ $3\vec{GM} \cdot \vec{CG} = 12$

$\vec{GM} \cdot \vec{CG} = 4$

0,25

$\vec{CG}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  $\vec{GM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \end{pmatrix}$

باستعمال الجداء السلمي

نجد المعادلة الديكارتية

لمستقيم: $x + \sqrt{3}y - 7 = 0$

إذن المجموعة $(E)$ هي

عبارة عن مستقيم.

4) $z' = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$

$z' = az + b$.

لاحظ أن $|a| = \sqrt{1+3} = 2$

0,75

فإن $S$ عبارة عن تشابه

مباشر نسبته $k = 2$ وزاويته

$\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$ ومركزه $W$

حيث $z_W = \dfrac{b}{1-a} = 1$

$W(1, 0)$

ب)

0,25

$z_{A'} = (1 + i\sqrt{3})z_A - i\sqrt{3}$

$z_{A'} = 1 - 2i\sqrt{3}$

$A'(1, -2\sqrt{3})$

## التمرين الرابع : 6,5 نقاط

$$f(x) = 2x - 2 + \ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$$

0,5 $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ معناه $x=0$ 1

مقارب للمنحنى $(C_f)$

0,5 $\lim_{|x|\to+\infty} [f(x)-(2x-2)] = 0$ 2

$y = 2x-2$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$

$$f'(x) = 2 + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x} \quad 3$$

0,5 $$f'(x) = \frac{2[x^3-2x^2+3x-2]}{x(x^2-2x+2)}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2-x+2)}{x(x^2-2x+2)}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x-1)$

0,5

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(4 ب)

ب) صورة $C$ هي $K'$ حيث

0,25 $$Z_{C'} = (1+i\sqrt3)Z_C - i\sqrt3$$
$$= (1+i\sqrt3)(2-i\sqrt3) - i\sqrt3$$
$$Z_{C'} = 5 \qquad K'(5,0)$$

صورة $G$ هي $G'$ حيث

0,25 $$Z_{G'} = (1+i\sqrt3)Z_G - i\sqrt3$$
$$= 3 + 2i\sqrt3$$
$$G'(3, 2\sqrt3)$$

1) استنتاج مساحة المثلث $A'C'G'$

$S' = K^2 S$. $\quad K = 2$ نسبة التشابه $S$

$S' = 4 \times 2\sqrt3$ u.a.

$= 8\sqrt3$ u.a.

$u.a = 4\,cm^2$

0,25 $S' = 8\times4\sqrt3\,cm^2$.

1) $m \in ]-\infty ; -2-\ln 2[$ لا توجد حلول
2) $m = -2-\ln 2$ حل مضاعف موجب
3) $m \in ]-2-\ln 2 ; -2[$ حلين موجبين
0,75 4) $m = -2$ حل واحد موجب
5) $m \in ]-2 ; +\infty[$ حلين مختلفين في الإشارة

ق- 9 $F'(x) = f(x)$

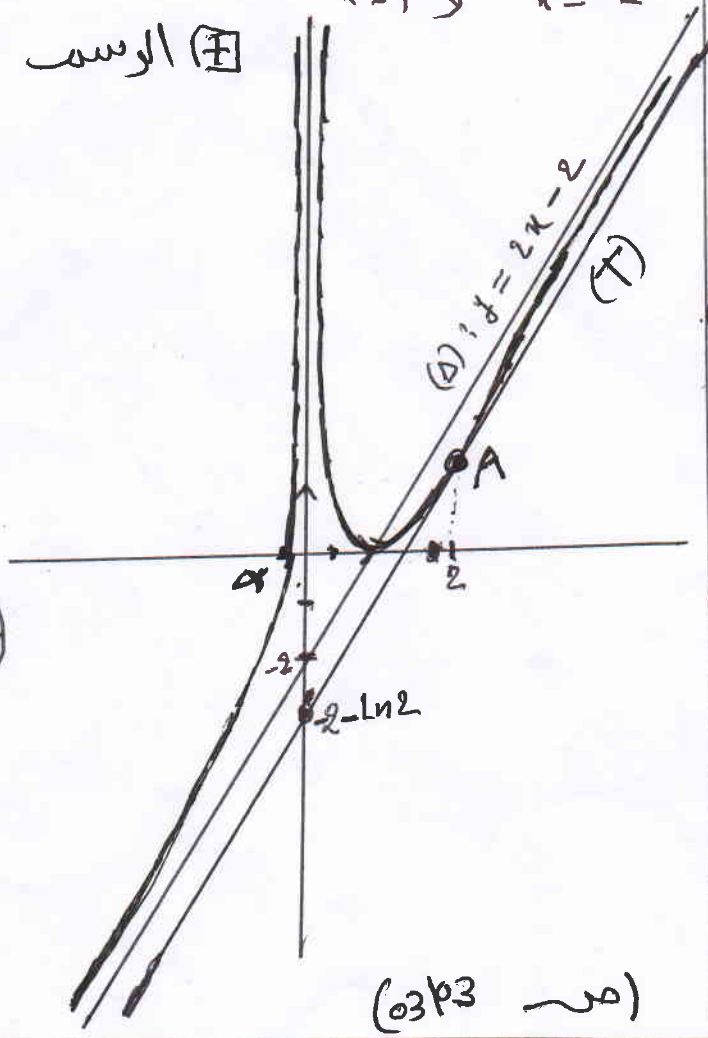
| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ |

F متناقصة في $]-\infty ; \alpha[$
0,25 F متزايدة في $]\alpha ; +\infty[$

$$\int_{\alpha}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} -f(x)\,dx$$

يمثل هذا العدد هندسيا مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C_f)$
0,5 وحامل محور الفواصل والمستقيمين
$x=\alpha$ و $x=-1$

III الرسم




1,5

(ص 03/03)

جدول التغيرات :

0,25

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $\|$ | $+\infty$ | $0$ | | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

0,25 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $f(1)=0$

0,25 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

14 الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$ :

$f(x) - y = \ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$

0,5 $f(x)-y \leq 0$ تكافئ $\frac{x^2-2x+2}{x^2} \leq 1$

تكافئ $-2x+2 \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $C_f$ فوق $(\Delta)$ | | $C_f$ فوق $(\Delta)$ | يقطع | $C_f$ تحت $(\Delta)$ | |

15 $f(-\frac{1}{2}) = -0,431$ ، $f(-\frac{1}{3}) = 0,552$

بما أن $f(-\frac{1}{2}) \times f(-\frac{1}{3}) < 0$

و f مستمرة ومتزايدة في

المجال $[-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}]$ حسب م.ق.م

0,5 يوجد حل وحيد من المجال يحقق

$f(\alpha)=0$ $-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{3}$

16 المماس // $(\Delta)$ يعني

$f'(x)=2$ وعليه $x=2$

0,5 النقطة هي $A(2 ; 2-\ln 2)$

$(T) : y = 2x - 2 - \ln 2$

18 المناقشة :

$f(x) = 2x+m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط

تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta m)$

$(\Delta m) // (\Delta)$ ،

ص 5