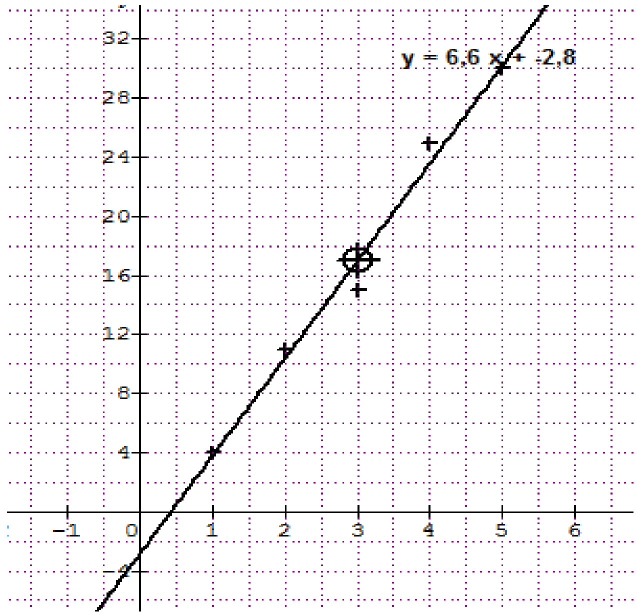
التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي دورة 2015

شعبة التسيير واقتصاد

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1) تمثيل سحابة النقط:



2) تعيين إحداثيات النقطة المتوسطة G

السنة	2008	2009	2010	2011	2012	مجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	4	11	15	25	30	85
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$x_i y_i$	4	22	45	100	150	321

لدينا $G(\overline{X};\overline{Y})$ حيث

$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}=\frac{15}{5}=3$ و $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5}=\frac{85}{5}=17$ ومنه $G(3;17)$

3) إيجاد معادلة مستقيم الانحدار

معادلة (d) مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي من الشكل

$y=ax+b$

حيث $a=\frac{\overline{x\times y}-\overline{x}\times\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-\left(\overline{x}\right)^2}$ و $b=\overline{y}-a\overline{x}$

اذن $a=\frac{\frac{321}{5}-3\times17}{\frac{55}{5}-3^2}=6.6$ و $b=17-6.6\times3=2.8$

ومنه $(d): y=6.6x+2.8$

4) عدد الثانويات المتوقع انجازها سنة 2015

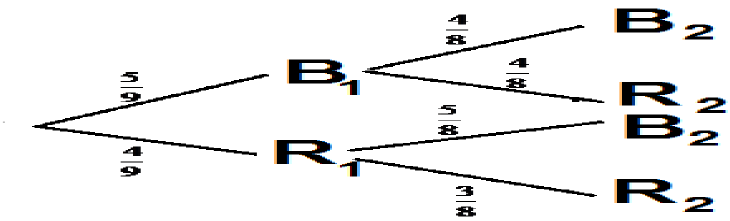
رتبة 2015 هي $2015-2007=8$

ومنه $y=6.6\times8+2.8=55.6\approx56$ اي سيتم انجاز 56 ثانوية

التمرين الثاني :

لتسهيل حساب الاحتمالات نستعين بشجرة الاحتمالات التالية :

نرمز للحادثة ظهور كرة بيضاء بـ B وكرة حمراء بـ R



1) A " سحب كرتين بيضاوين " $p(A)=p(B_1\cap B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$

2) B " سحب كرتين من نفس اللون " اذن

$$p(B)=p(B_1\cap B_2)+p(R_1\cap R_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{18}+\frac{3}{18}=\frac{4}{9}$$

3) C " سحب كرتين الاولى بيضاء والثانية حمراء "

$$p(C)=p(B_1\cap R_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$$

4) D " سحب كرة بيضاء علما ان الاولى حمراء "

$$P(D)=P_{R_1}(B_2)=\frac{P(R_1\cap B}{P(R_1)}=\frac{\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{8}$$

التمرين الثالث: $U_0=1$, $U_{n+1}=\frac{U_n-1}{2}$

1) حساب الحدود

$U_1=\frac{U_0-1}{2}=0$ ، $U_2=\frac{U_1-1}{2}=\frac{-1}{2}$ ، $U_3=\frac{U_2-1}{2}=\frac{-3}{4}$

التخمين: $U_0>U_1>U_2>U_3$ فالمتتالية متناقصة

2) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية

ط1) لدينا $V_n=U_n+\alpha$ ومنه $U_n=V_n-\alpha$ اذن

$$V_{n+1}=U_{n+1}+\alpha=\frac{U_n-1}{2}+\alpha=\frac{(V_n-\alpha)-1}{2}+\alpha=\frac{1}{2}V_n+\left(\frac{-\alpha-1}{2}+\alpha\right)$$

(V_n) هندسية معناه $V_{n+1}=q\times V_n$ بالمطابقة مع العلاقة السابقة ينتج $q=\frac{1}{2}$

و $\left(\frac{-\alpha-1}{2}+\alpha\right)=0$ اي $\frac{-\alpha-1+2\alpha}{2}=0$ معناه $\alpha=1$

ط2) نحسب الحدود V_0,V_1,V_2 بدلالة α ونطبق قاعدة الوسط الهندسي:

$V_0=1+\alpha$ ، $V_1=0+\alpha=\alpha$ ، $V_2=\frac{-1}{2}+\alpha$

ولدينا $V_0\times V_2=V_1^2$ اي $(1+\alpha)\left(\frac{-1}{2}+\alpha\right)=\alpha^2$ وهذه المعادلة تقبل حل

وحيد هو $\alpha=1$ (تأكد من ذلك)

II) 1) التعبير عن V_n بدلالة n

من أجل $\alpha=1$ ، (V_n) هندسية اساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الاول $V_0=2$

ومنه $V_n=V_0\times q^n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\ }{2}\right)^{n-1}$

عبارة U_n بدلالة n : $U_n=V_n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n)

لدينا

$$U_{n+1}-U_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه $U_{n+1}-U_n<0$ وبالتالي (U_n) متناقصة

3) دراسة التقارب :

لدينا $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)=-1$ لان $-1<\frac{1}{2}<1$

وبالتالي $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

اذن المتتالية (U_n) متقاربة

4) حساب المجاميع :

$$S_n=V_0+V_1+...+V_n=V_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$=4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$Y_n=U_0+U_1+...+U_n=(V_0-1)+(V_1-1)+...+(V_n-1)$$

$$=(V_0)+V_1+...+V_n)-1-1...-1$$

$$=S_n-(n+1)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-(n+1)=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{Y_n}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{Y_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n}-1\right)=-1$$

التمرين الرابع :

f معرفة على ، بالعبارة $f(x)=\frac{3e^x+1}{e^x+1}$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x+1}{e^x+1}=1$ لان $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

اذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل عند $-\infty$

معادلته $y=1$

2) اثبات ان $f(x)=\frac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}$

لدينا $f(x)=\frac{3e^x+1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}(3e^x+1)}{e^{-x}(e^x+1)}=\frac{3e^{-x}e^x+e^{-x}}{e^{-x}e^x+e^{-x}}$

ومنه $f(x)=\frac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ينتج : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^{-x}}{1+e^{-x}}=3$ لان

$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

اذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل عند $+\infty$

معادلته $y=3$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على ، ودالتها المشتقة هي f' حيث :

$$f'(x)=\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x>0$ و $e^x+1>0$ ومنه $f'(x)>0$

اذن الدالة f متزايدة تماما على ،

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	3

4) اثبات ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $I(0,2)$

لدينا f' تقبل الاشتقاق على ، حيث :

$$f''(x)=\frac{2e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)2e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{2e^x(e^x+1)-4e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$=\frac{2e^x(e^x+1)-4e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{2e^x(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^3}=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x>0$ و $(e^x+1)^3>0$ ومنه اشارة $f''(x)$

من اشارة $1-e^x$

$1-e^x=0$ معناه $e^x=1$ معناه $x=0$

$1-e^x>0$ معناه $e^x<1$ معناه $x<0$

اذن اشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بما ان المشتقة الثانية انعدمت عند 0 مغيرة اشارتها فان النقطة $I(0;f(0))$ هي

نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) $f(0)=\frac{3+1}{1+1}=2$ اي $I(0;2)$

معادلة المماس (Δ) عند I

(Δ) له معادلة من الشكل $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ اذن $y=\frac{1}{2}x+2$

5) اثبات ان $I(0;2)$ هي مركز تناظر (C_f)

يكفي اثبات ان $f(2\times0-x)+f(x)=2\times2$ اي $f(-x)+f(x)=4$

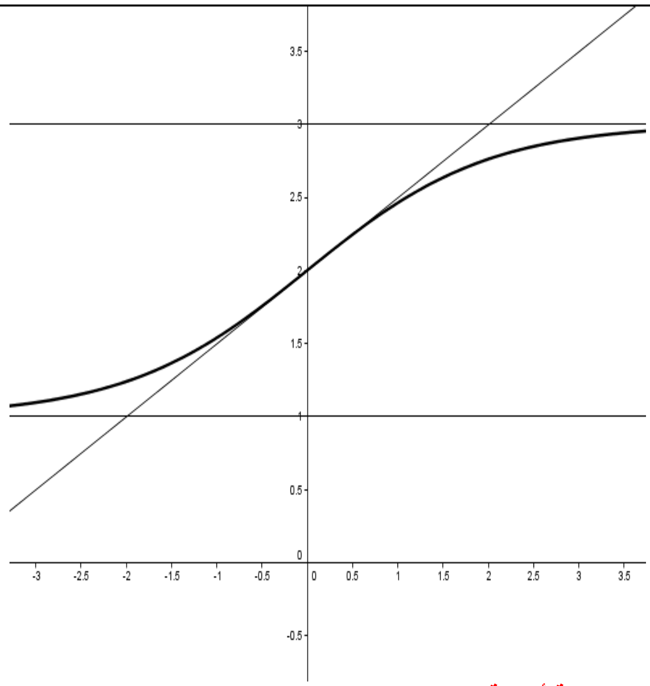
لدينا $f(-x)+f(x)=\frac{3+e^x}{1+e^x}+\frac{3e^x+1}{e^x+1}=\frac{4(e^x+1)}{e^x+1}=4$ و م ه د

(لحساب $f(-x)$ استعملت العبارة الثانية للدالة f)

6) الرسم

7) اثبات ان $f(x)=1+\frac{2e^x}{e^x+1}$

لدينا $1+\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1+2e^x}{e^x+1}=\frac{3e^x+1}{e^x+1}=f(x)$



تعيين دالة أصلية لـ f على ،

f مستمرة على ، فهي تقبل دوال أصلية على ،
العبارة الأخيرة تمكننا من حسابها بسهولة حيث :

$$F(x)=x+2\ln(e^{x}+1)$$

حساب مساحة الحيز S

على المجال $[0;1]$ نلاحظ ان (Δ) فوق (C_f) ومنه مساحة الحيز

هي $S=\int_0^1 (y-f(x))dx$

بتوزيع التكامل نجد $S=\int_0^1 y\,dx-\int_0^1 f(x)dx$

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^{2}+2x-x-2\ln(e^{x}+1)\right]_0^1$$

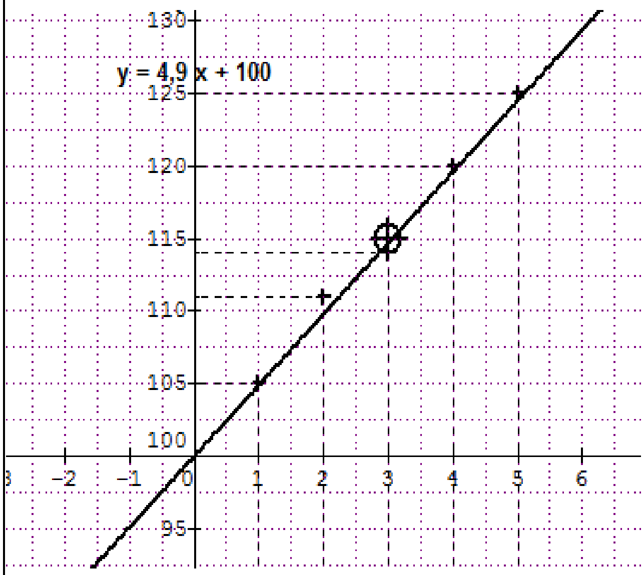
$$=\left[\frac{1}{4}x^{2}+x-2\ln(e^{x}+1)\right]_0^1$$

$$=\frac{5}{4}-2\ln(e^{1}+1)+2\ln(2)\quad u.a$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1) تمثيل سحابة النقط:



2) تعيين إحداثيات النقطة المتوسطة G

السنة	2008	2009	2010	2011	2012	مجموع
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	105	111	114	120	125	575
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$x_i y_i$	105	222	342	480	625	1774

لدينا $G(\overline{X};\overline{Y})$ حيث

$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}=\frac{15}{5}=3$ و $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}=\frac{575}{5}=115$ ومنه $G(3;17)$

3) إيجاد معادلة مستقيم الانحدار

معادلة (d) مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي من الشكل

$$y=ax+b$$

حيث $a=\frac{\overline{x\times y}-\overline{x}\times\overline{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-\left(\overline{x}\right)^2}$ و $b=\overline{y}-a\overline{x}$

إذن $a=\frac{\frac{1774}{5}-3\times115}{\frac{55}{5}-3^2}=4.9$ و $b=115-4.9\times3=100.3$

ومنه $(d): y=4.9x+100.3$

هل التوقع صحيح ؟.

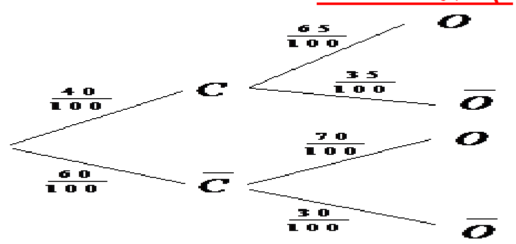
لدينا رتبة 2015 هي $2015-2007=8$

ومنه $y=4.9\times8+100.3=139.5\approx140$ اي سيتم صنع 140

سيارة سنة 2015 ومنه التوقع غير ممكن ,

التمرين الثاني :

1) شجرة الاحتمالات



2) حساب احتمال الحوادث

1) A " نختار رجل "

$$p(A)=p(C\cap O)+p(\overline{C}\cap O)=\frac{40}{100}\times\frac{65}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{17}{25}$$

2) B " نختار رجل عامل " $p(B)=p(\overline{C}\cap O)=\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{21}{50}$

3) C " نختار عامل علما انه رجل "

$$p(C)=p_O(\overline{C})=\frac{p(\overline{C}\cap O)}{p(O)}=\frac{p(B)}{p(A)}=\frac{\frac{21}{50}}{\frac{17}{25}}=\frac{21}{50}\times\frac{25}{17}=\frac{21}{34}$$

التمرين الثالث:

$$U_{n+1}=\frac{2}{5}U_n+1 \quad , \quad U_0=1$$

1) حساب الحدود

$U_1=\frac{2}{5}U_0+1=\frac{7}{5}$ ، $U_2=\frac{39}{25}$ ، $U_3=\frac{203}{125}$ $U_4=\frac{1031}{406}$

2) برهان بالتراجع ان : $0<U_n<\frac{5}{3}$

لتكن الخاصية $P(n):"0<U_n<\frac{5}{3}"$

1) من أجل $n=0$ لدينا $0<U_0=1<\frac{5}{3}$ ومنه $P(0)$ صحيحة

2) نفرض ان $P(n)$ صحيحة اي $0<U_n<\frac{5}{3}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

اي نبرهن ان $0<U_{n+1}<\frac{5}{3}$

لدينا من فرضية التراجع $0<U_n<\frac{5}{3}$ ومنه $0<\frac{2}{5}U_n<\frac{2}{3}$

إذن $0<\frac{2}{5}U_n+1<\frac{5}{3}$ اي ان $0<U_{n+1}<\frac{5}{3}$ يعني ان $P(n+1)$

صحيحة ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من كل n من ¥

3) اثبات ان (U_n) متزايدة تماما

لدينا : $U_{n+1}-U_n=\frac{2}{5}U_n+1-U_n=\frac{-3}{5}U_n+1=\frac{-3}{5}(U_n-\frac{5}{3})$

ومن السؤال السابق : $0<U_n<\frac{5}{3}$ معناه $U_n-\frac{5}{3}<0$

إذن $U_{n+1}-U_n>0$ هذا يعني ان (U_n) متزايدة تماما

4) التقارب :

لدينا (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى لان $0<U_n<\frac{5}{3}$

ومنه (U_n) متقاربة

II) $V_n=U_n-\frac{5}{3}$

1) اثبات ان (V_n) هندسية

$$V_{n+1}=U_{n+1}-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}U_n+1-\frac{5}{3}=\frac{2}{5}U_n-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}(U_n-\frac{5}{3})$$

ومنه $V_{n+1}=\frac{2}{5}V_n$ إذن (V_n) هندسية اساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الاول $V_0=\frac{-2}{3}$

2) التعبير عن V_n و U_n بدلالة n

$V_n=V_0\times q^n=\frac{-2}{3}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ $\quad$ $U_n=V_n+\frac{5}{3}=\frac{-2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{5}{3}$

3) حساب المجاميع

$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_n=V_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{-2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{-2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{3}{5}}$$

$$S_n=\frac{-10}{9}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$