الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لتلمسان

اختبار بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات — **ثانوية:** بوعزة ميلود ـ مغنية ـ

الشعبة: **علوم تجريبية** — المدة: **3 ساعات ونصف** — **18 ماي 2015**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;5[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+3}{5-x}$

1. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماماً.

2. (u_n) المتتالية المعرّفة بـ : $u_0=2$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{5-u_n}$

أ ـ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $1<u_n\le 2$.

ب ـ بيّن أنّ (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3. (v_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{3-u_n}{u_n-1}$.

أ ـ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها2 ، يطلب تحديد حدّها الأوّل .

ب ـ عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وَ أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ ـ نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+.....+\dfrac{1}{u_n-1}$. أُحسب S_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

1. أ ـ عيّن العددين المركّبين z_1 وَ z_2 حيث : $\begin{cases} i z_1+2z_2=1+9i \\ 2z_1+i z_2=-2+8i \end{cases}$

ب ـ نضع : $z_1=1+3i$ وَ $z_2=2+4i$

ـ تحقّق أنّ : $(z_2-z_1)\,e^{-i\frac{\pi}{6}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

ـ استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ وَ $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، B و C

التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+3i$ ، $z_B=2+4i$ وَ $z_C=2+3i$.

(δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ وَ k يتغير في $\mathbb{R}^+$.

أ ـ عيّن قيسا للزاوية $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$.

ب ـ بيّن أنّ المجموعة (δ) هي نصف المستقيم $[AB)$.

جـ ـ تحقق أنّ: $\dfrac{z_C - z}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k\right)$.

د ـ استنتج z_H لاحقة النقطة H من نصف المستقيم $[AB)$ حيث يكون المستقيمان (AB) وَ (CH) متعامدين.

3. أ ـ عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب ـ T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة z' حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

ـ بيّن أنّ: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ ثم استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

ـ أُكتب العبارة المركبة للتحويل T.

ـ تحقّق أنّ النقطة C هي صورة النقطة H بالتحويل T ثم استنتج أن النقطة H منتصف $[AB]$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A(4;2;2)$ ، $B(5;-2;3)$ ، $C(3;2;3)$ وَ $D(1;-8;1)$ وَ المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}(2;1;2)$ شعاع توجيه له.

1. أ ـ أُحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج أنّ النقط A ، B وَ C تعين مستوياً (ABC).

ب ـ بيّن أنّ المستقيم (Δ) يعامد المستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

جـ ـ عين احداثيات النقطة K المسقط العمودي لـ D على (ABC).

د ـ أُحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

2. أ ـ تحقّق أنّ النقطة $H\left(\dfrac{33}{5};-\dfrac{26}{5};3\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة K على (BC).

ب ـ بينّ أنّ مساحة المثلث BCD تساوي $\left(6\sqrt{6}\right)u.a$ (يرمز $u.a$ إلى وحدة المساحة).

جـ ـ استنتج المسافة بين النقطة A وَالمستوي (BCD).

التمرين الرابع: (7 نقاط)

1. f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 - x^2e^x$

وَ $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث: وحدة الطول $1\,cm$

أ ـ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2. أ ـ أُحسب $f'(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب ـ بيّن أنّ المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل نقطتي انعطاف.

جـ ـ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحداً α حيث : $0,7<\alpha<0,8$.

3. عين معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها -1.

4. h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\dfrac{1}{e}+x\,e^{x}$

أ ـ أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $h(x)\geq 0$.

ب ـ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f(x)-\left(\dfrac{1}{e}x+1\right)=-x\,h(x)$.

جـ ـ استنتج وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

5. أنشيء المماس (T) وَالمنحني (C) .

6. G الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{x}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة.

أ ـ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b وَ c حتى تكون الدالة G أصلية للدّالة $g:x\mapsto x^2e^{x}$ على $\mathbb{R}$.

ب ـ أحسب بالسنتيمتر المربّع مساحة حيز المستوي المحدّد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=1$ ، $x=-2$ وَ $x=0$.

7. k الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=1-x^2e^{-x}$.

ـ تحقّق أنّ: $k(x)=f(-x)$ ثم أنشئ (C_k) المنحني الممثّل للدالة k .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (3 نقاط)

في كل حالة من الحالات التالية توجد ثلاثة اقتراحات، من بينها اقتراح واحد فقط صحيح ، حدّده مع التبرير .

1. الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد وَالمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، (Δ) وَ (Δ') المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين كما يلي:

$$(\Delta):\begin{cases}x=6\\ y=-2+\alpha\\ z=-1-\alpha\end{cases};\ (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad (\Delta'):\begin{cases}x=1+5t\\ y=1\\ z=-8+4t\end{cases};\ (t\in\mathbb{R})$$

أ ـ (Δ) وَ (Δ') متوازيان ب ـ (Δ) وَ (Δ') متقاطعان جـ ـ (Δ) وَ (Δ') ليسا من نفس المستوي

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، M نقطة من المستوي تختلف عن A وعن B لاحقتها z . مجموعة النقط M حيث: $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ وَ $k\in\mathbb{Z}$ هي:

أ ـ مستقيم باستثناء A و B ب ـ نصف دائرة باستثناء A و B جـ ـ دائرة باستثناء A و B

3. (v_n) متتالية هندسيّة أساسها 3 وحدّها الأول $v_0=4$ وَ (u_n) المتتالية المعرّفة بـ : $u_0=5$ وَمن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=v_n+u_n$. الحدّ العام للمتتالية (u_n) هو :

أ ـ $u_n=2\left(3^{n+1}-1\right)+5$ ب ـ $u_n=2\left(3^n-1\right)+5$ جـ ـ $u_n=2\left(3^n-1\right)-5$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^3-7z^2+25z-39$

1. أ ـ عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث ؛ من أجل كل عدد مركّب z : $P(z)=(z-3)\left(z^2+az+b\right)$

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ؛ $P(z)=0$

2. المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد وَالمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نسمي A ، B ، C وَ D النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=3$ ، $z_C=2-3i$ وَ $z_D=-1-2i$.

ـ أُحسب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. S التحويل النقطي الذّي يرفق بكلّ نقطة M لاحقتها z ؛ النّقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=(1-i)z-1$

أ ـ عيّن طبيعة التحويل S وعناصرهُ المميّزة.

ب ـ تحقّق أنّ: $S(B)=C$ وَ عيّن لاحقة النّقطة E علماً أنّ: $S(E)=D$.

جـ ـ بيّن أنّ النقط A ، B ، C وَ D تنتمي إلى الدائرة التّي مركزها E ، يطلب تعيين نصف قطرها.

4. أ ـ عيّن z_F لاحقة النّقطة F صورة النّقطة A بالدّوران الذّي مركزه C وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.

ب ـ تحقّق أنّ النقط A ، B وَ F في استقامية.

5. أ ـ عيّن المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_A+\sqrt{10}e^{i\theta}$ وَ $\theta\in\mathbb{R}$.

ب ـ استنتج طبيعة المجموعة (Γ') صورة المجموعة (Γ) بالتحويل S ثم أُحسب مساحة (Γ').

6. نرمز بـ A_0 إلى النّقطة التي لاحقتها $z_0=1+i$ ؛ وَمن أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $A_{n+1}=S(A_n)$

أ ـ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $z_n=(1-i)^n+i$.

ب ـ (u_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $u_n=|z_{n+1}-z_n|$

ـ بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل ثمّ أُحسب بدلالة n الطول L_n حيث:

$L_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_nA_{n+1}$.

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

$A(-2;6;-2)$، $B(1;0;1)$، $C(-1;-2;2)$ وَ $D(3;2;0)$.

1. أ ـ بيّن أنّ الجملة : $\begin{cases} x=4\beta+5 \\ y=4\beta+4 \; ; \; (\beta\in\mathbb{R}) \\ z=-2\beta-1 \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (BC).

ب ـ استنتج أنّ النقط A ، B وَ C تعيّن مستوياً (ABC).

جـ ـ عيّن شعاعاً ناظمياً للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية لـ (ABC).

2. (P) المستوي الذي يشمل المستقيم (BC) وَ عمودي على المستوي (ABC).

أ ـ أثبت أنّ : $5x-4y+2z-7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

ب ـ بيّن أنّ المسافة بين النقطة A وَ المستقيم (BC) تساوي $3\sqrt{5}$ ثم استنتج أن النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

3. أ ـ (Δ) هو المستقيم ذو تمثيل وسيطي : $\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \quad ; (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=2\alpha+1 \end{cases}$.

M نقطة كيفية من المستقيم (BC) ، N نقطة كيفية من المستقيم (Δ) وَ $F(1;1;2)$ وَ G مرجح الجملة المثقلة $\{(F;1);(M;-1);(N;1)\}$.

أ ـ عين إحداثيات النقطة G بدلالة α وَ β.

ب ـ استنتج أن مجموعة النقط G لمّا يتغير العددان الحقيقيان α وَ β في $\mathbb{R}$ هي مستوي يطلب تعيينه.

التمرين الرابع: (6,5 نقاط)

I. الجدول التالي هو جدول تغيرات الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-1-\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)$

قيم x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

1. أُحسب $g(0)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α في المجال $]0;+\infty[$ ثم تحقّق أنّ: $0,9<\alpha<1$.
3. حدّد إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II. f الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-3+\frac{1}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ ـ أُحسب نهايتي f عند 0 وَ $+\infty$.

ب ـ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي موجب تماماً x ؛ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

جـ ـ استنتج اتّجاه تغيّر f ثم شكّل جدول تغيراتها.

1. أ ـ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]$ ثم فسّر النتّيجة بيانياً.

ب ـ أُدرس وضعية المنحني (C) بالنّسبة للمستقيم (Δ) الذّي معادلته $y=x-3$.

جـ ـ بيّن أنّ: $f(\alpha)=2\alpha-3-\frac{1}{\alpha+1}$.

2. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً β حيث: $3,1<\beta<3,2$.
3. أ ـ أُرسم المنحني (C) وَمستقيميه المقاربين . (تؤخذ $\alpha=0,95$)

ب ـ ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\ln m$.

4. أ ـ F الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

ـ ماذا تمثّل الدالة F ؟ أُحسب $F'(x)$ ثم استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة F على المجال $]\beta;+\infty[$.

ب ـ بيّن أنّ: $F(\beta^2+1)\geq F(2\beta)$.