الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — متقن القرارة

امتحان بكالوريا التجريبي — دورة ماي 2015

الشعبة: رياضيات — 2015 / 05 /18

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(03,5 ن).

I) نعرف على * المتتالية (u_n) حيث : $\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} \end{cases}$

1- احسب كلا من u_2 و u_3.

2- أثبت بالتراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

3- برهن أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n)؟

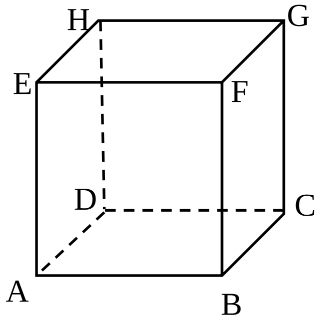
II) نضع لكلّ n من N^*: $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln u_n$.

1- أثبت أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2- عبّر عن w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ، ثم احسب $\lim u_n$

3- احسب بدلالة n الجداء: $\pi_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times .... \times u_n$

التمرين الثاني:(04 ن).



نعتبر المكعب ABCDEFGH الذي طول ضلعه 1 " الشكل المقابل"

ننسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(D\ ;\ \overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DH})$.

K مرجح الجملة $\{(F;2),(D,1)\}$

I) 1/ بين أن إحداثيات النقطة K هي $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

2/ برهن أن المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان.

II) نعتبر النقطة M من القطعة $[HG]$ ، نضع : $m = HM$ ، " $0 < m < 1$ ".

1/ برهن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $]0\ ;1[$ ، حجم رباعي الوجوه EFMD يساوي $\frac{1}{6}$ بوحدة الحجم.

2/ بين أن: $(-1+m)x + y - mz = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (MFD).

3/ نرمز إلى d_m إلى بعد النقطة E عن المستوي (MFD).

أ- برهن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $]0\ ;1[$ ، $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

ب- عين وضعية النقطة M التي من أجلها تكون d_m أكبر قيمة ممكنة.

ت- ستنتج أنه لما تكون d_m أكبر ما يمكن تكون النقطة K هي المسقط العمودي لـ E على المستوي (MFD).

التمرين الثالث:(05,5 ن).

I) نعتبر في z^2 المعادلة: $16x - 3y = 4 \dots\dots (E)$.

1/ تحقق أن $(1;4)$ حل خاص للمعادلة (E).

2/ عين مجموعة الحلول للمعادلة (E).

II) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} Z$

نعرف المتتالية النقطية (M_n) بـ : النقطة M_0 ذات اللاحقة $Z_0 = i$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1} = f(M_n)$

نضع Z_n لاحقة النقطة M_n.

علّمت النقط $M_0\ ;\ M_1\ ;\ M_2;\ M_3$ في الشكل المرفق " يعاد الشكل مع ورقة الإجابة"

1/ عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f.

2/ q عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر التحويل النقطي f^q حيث: $f^q = \underbrace{fofo \dots of}_{q \text{ مرة}}$

أ- n_0 عدد طبيعي ، برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم q: $f^q(M_{n_0}) = M_{n_0+q}$

ب- حدد طبيعة التحويل f^q مع ذكر عناصره المميزة بدلالة q.

ت- عين قيم q حتى يكون f^q تحاكي يطلب تعيين نسبته حسب قيم q.

3/ أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$OM_{n+4} = 4OM_n$ و $(\overrightarrow{OM}_n\ ;\ \overrightarrow{OM}_{n+4}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، k عدد صحيح.

ب-أتمم الشكل المرفق بإنشاء النقط $M_4\ ;\ M_5\ ;\ M_6$.

4/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$

5/ أ- p عدد طبيعي و $p \leq n$ ، عبر بدلالة n و p عن قيس الزاوية $(\overrightarrow{OM}_p\ ;\ \overrightarrow{OM}_n)$.

ب-برهن أنه إذا كان المثلث OM_nM_p قائم O فإن: $n \equiv p[4]$.

6/ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[ox)$.

التمرين الرابع: (07ن).

I) الدالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g.

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0{,}31 < \alpha < 0{,}32$.

3- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1- أحسب نهايتي f عند 1- بقيم أكبر و $+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\propto)$.

5- أحسب $f(2)$، ثم أنشئ (C).

III) (Γ) منحني الدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $h(x) = \ln(x+1)$ ، $A(-1;2)$ نقطة من المستوي و M نقطة من (Γ) ذات الفاصلة x.

1- أثبث أن المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ) بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) عين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ت) بين أن: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط).

"يمكن استعمال النتيجة التالية في هذا التمرين - a , b عددان طبيعيان : $PGCD(a^2,b^2)=PGCD(a,b)$- "

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $PGCD(k;k+1)=1$ و $PGCD(2k+1;2k+3)=1$.

2- نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n=1+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $PGCD(S_{2k};S_{2k+1})=(2k+1)^2$.

ج/ أحسب : $PGCD(S_{2k+1};S_{2k+2})$.

د/ استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n : $PGCD(S_n;S_{n+1})$.

التمرين الثاني: (05,5 نقاط).

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$, $C(0;5;1)$

و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=t+2\\y=t+4\\z=-t+2\end{cases}$; $t\in R$.

1- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، يطلب حساب مساحته.

2- تحقق أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية (ABC) .

3- أ/ أوجد تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المحدد بالمستقيم (Δ) و النقطة I متصف $[AB]$.

ب/ تحقق أن: $y+z-6=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P),

4- أ/ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (P') المحوري للقطعة $[AC]$.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين (P) و (P').

5- أثبت أن المستويات (P) ، (P') و (ABC) تتقاطع في نقطة وحيدة G يطلب تعيين إحداثييها ، ما ذا تمثل G بالنسبة للمثلث ABC.

6- أ/ نعتبر النقطة D_t نقطة من المستقيم (Δ)، عين قيمتي t حيث: $AD_t^{\,2}=AB^2$.

ب/ حدد بدقة طبيعة الشكل $ABCD_2$ ، ثم احسب حجمه V.

7- أ/ عين المجموعة (S) للنقط M التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MD_2}\right\|=6$.

ب/ بين أن (S) يقطع المستوي (ABC) وفق الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط).

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z و الوسيط الحقيقي α التالية:

$z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$.

1- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه.

2- أوجد العددين الحقيقين a , b بحيث المعادلة (E) تكافئ $(z-\alpha i)(z^2+az+b)=0$.

-3 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

II) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C و D *التي لواحقها على الترتيب*

$z_A = \alpha i\ \ ,\ \ z_B = 2+3i\ \ ,\ \ z_C = \overline{z_B}$ و $z_D = 5$

-1 بين أن z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\pi}{4}$ زاوية له هي:

$z_E = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + i\left(\frac{\alpha+5}{2}\right)$.

-2 عين z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة D بالدوران r الذي مركزه I منتصف القطعة $[AB]$ و $-\frac{\pi}{2}$ زاويتا له.

-3 أ/ بين أن $\frac{z_F - z_E}{z_A - z_E} = \frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

ب/ عين قيمتي α التي تكون من أجلها النقطة A , E و F على استقامية.

ج/ من أجل قيمتي α المتحصل عليهما سابقا بين أن A تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[BC]$.

د/ استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث ABC.

التمرين الرابع (07 نقاط):

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

I) λ عدد حقيقي ، g_λ دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ: $g_\lambda(x) = -\lambda - xe^x$.

-1 أحسب نهايتي الدالة g_λ عند $+\infty$ و $-\infty$.

-2 أدرس اتجاه تغير g_λ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

-3 حدد حسب قيم λ وجود و عدد حلول المعادلة $g_\lambda(x) = 0$.

II) f_λ دالة معرفة على R بـ : $f_\lambda(x) = -\lambda x + (1-x)e^x$ ، (C_λ) تمثيلها البياني.

-1 أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $+\infty$ و $-\infty$.

-2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'_\lambda(x) = g_\lambda(x)$

-3 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f_\lambda(x)+\lambda x)$ ، ماذا تستنتج؟.

-4 أدرس وضعية (C_λ) بالنسبة للمستقيم (Δ_λ) المعرف بالمعادلة: $y = -\lambda x$.

-5 أثبت أن المنحني (C_λ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها بدلالة λ.

-6 بين أن (C_λ) يشمل نقطة ثابتة لما يتغير λ في R يطلب احداثييها.

-7 أكتب معادلة المماس (D_λ) للمنحني (C_λ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

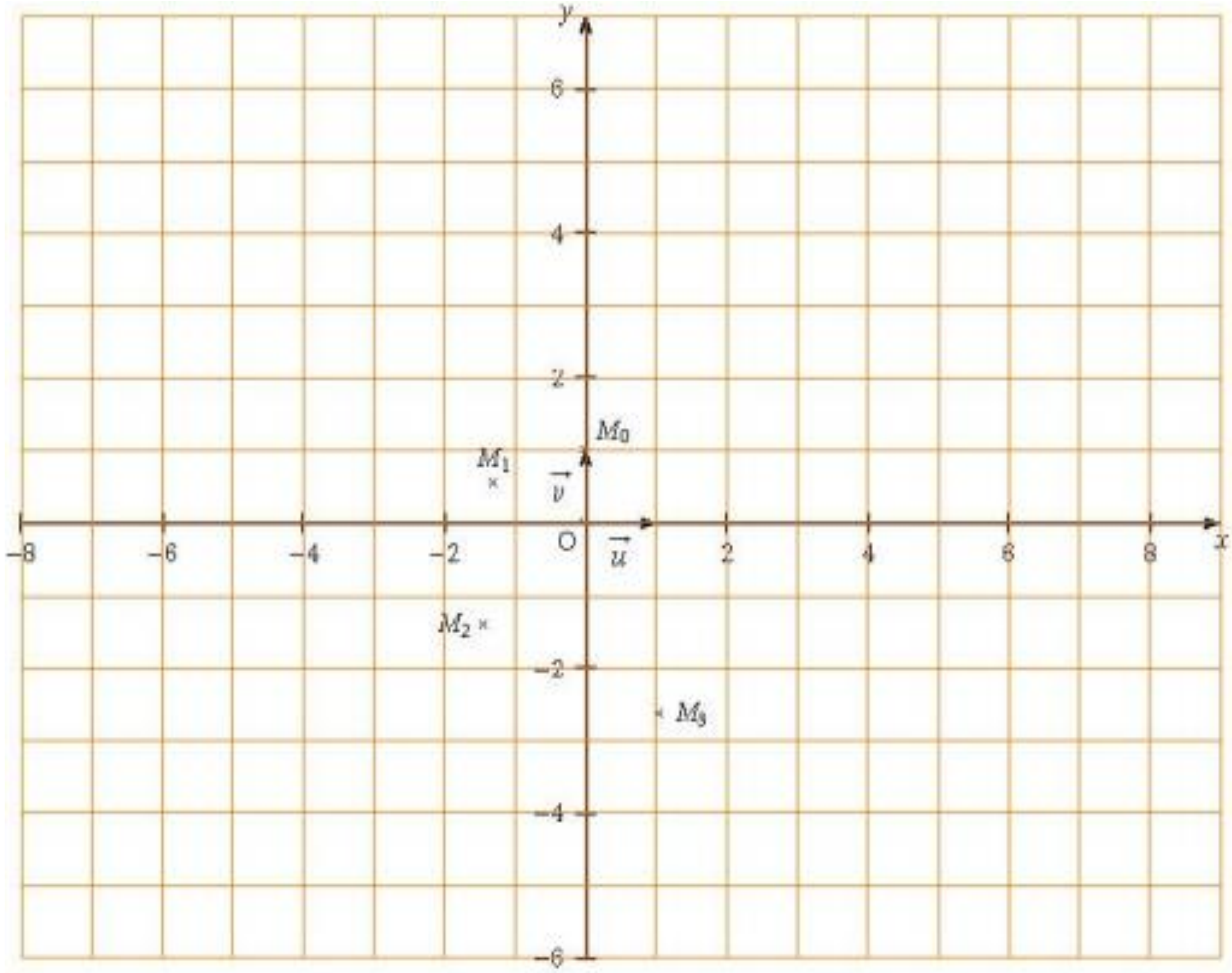
-8 أ/ شكل جدول تغيرات الدالة f_1.

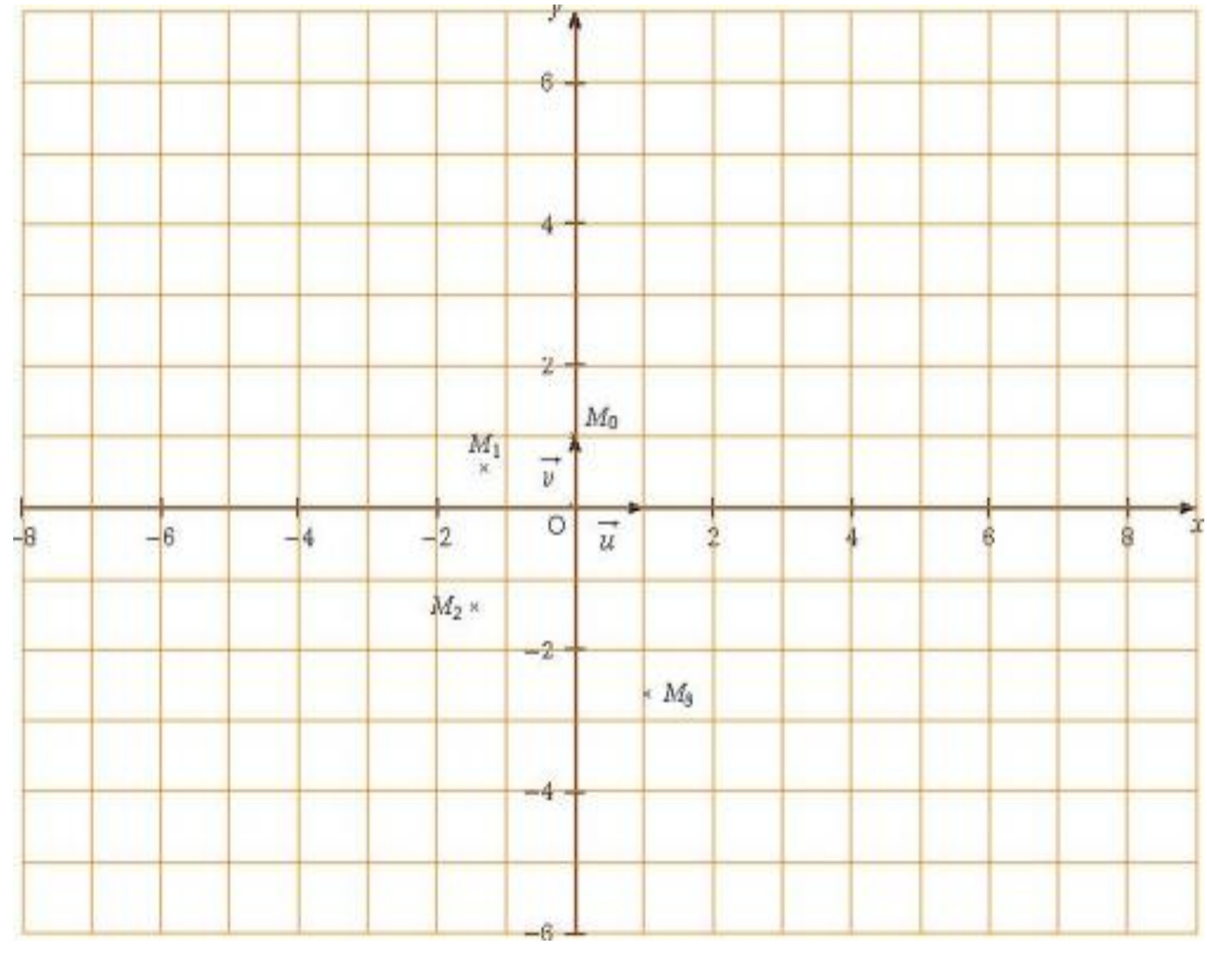
ب/ بين المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\right[$.

جـ/ أرسم (Δ_1) ، (D_1) و (C_1).

د/ أحسب بالسنتمتر مربع مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_1) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y = -x\ \ ,\ \ x = ln2\ \ ,\ \ x = ln4$.


y
6
4
2
M_0
M_1
$\vec{v}$
-8 -6 -4 -2 O $\vec{u}$ 2 4 6 8 x
M_2
-2
M_3
-4
-6


y
6
4
2
M_0
M_1
$\vec{v}$
-8 -6 -4 -2 O $\vec{u}$ 2 4 6 8 x
M_2
-2
M_3
-4
-6