الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المدية **متقن الخوارزمي قصر البخاري**

الامتحان التجريبي لبكالوريا التعليم الثـانوي دورة ماي 2013

الشعبة :**تقني رياضي + رياضيات**

اختبار في مادة : **الرياضيات** المدة:**4 ساعـات ونصف**

على المترّشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

تمرين 1 : (5 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ تعطى النقط : $A(1,2,2)$ ، $B(-1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$

1- بين أن المستوي (Q) الذي يشمل النقط A ، B ، C معادلته : $x-2y+2z-1=0$.

2- (P) مستو معادلته : $z=1$.

أ) تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

ب) استنتج تقاطع المستويين (P) و (Q).

ج) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

3- أثبت أن النقطة $H(1,2,1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

- هل المستقيمان (BC) و (AH) متقاطعان ؟ برر إجابتك.

4- G مرجح الجملة المثقلة $\left\{(A,1),(B,1),(C,-1)\right\}$.

أ) عين إحداثيات النقطة G.

ب) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

تمرين 2 : (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$

L تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $z'=(1+i)z+2$

1- حدد طبيعة التحويل النقطي L و عناصره المميزة.

2- A نقطة لاحقتها : $z_A=-2+2i$

- عين لاحقتي النقطتين A' ، B حيث $A=L(B)$ ، $A'=L(A)$

- ما هو التحويل النقطي الذي يحول النقطة B إلى النقطة A' .

3- بين أن : $\dfrac{z'-z}{z_0-z}=-i$ حيث : z_0 لاحقةالنقطة الصامدة ω بالتحويل L.

- قارن بين : MM' و $M\omega$ ، ثم عين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M\omega}\right)$.

- بين كيف يمكن إنشاء النقطة M' انطلاقا من ω.

4- (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب حيث : $|z+2-2i|=\sqrt{2}$

5- عين طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة ، ثم تحقق أن B تنتمي إلى (Γ).

تمرين 3 :(4 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ،و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1- احسب U_2 و U_3.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $U_{n+1} = 4U_n + 1$

- تحقق أن : U_n عدد طبيعي ، ثم استنتج أن : U_n و U_{n+1} أوليان بينهما.

3- (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n.

4- أ) احسب $PGCD\left((4^6 - 1),(4^5 - 1)\right)$ ،

ب) عين من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD\left((4^{n+1} - 1),(4^n - 1)\right)$

5- أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{3n}$.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7.

تمرين 4 : (6 نقاط)

الجزء الأول : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$

1- بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث : $1.5 < \alpha < 1.6$

2- احسب نهايتي g عند $-\infty$ و $+\infty$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

4- احسب $g(0)$ ، ثم استنتج من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$

C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين نهايتي الدالة f عند : $-\infty$ و $+\infty$.

2- تحقق أن $f(x)$ تكتب من الشكل: $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{1}{x}}$ ، ثم احسب نهايتي f عند 0.

3- أثبت من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ أن : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$

4- باستعمال الجزء الأول عين إشارة f' ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5- تحقق أن : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$.

6- ارسم C_f (تذكر أن الدالة f غير مستمرة عند 0).

تمرين 1 :(5 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين : A و B حيث :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$

1− اكتب العددين z_A ، z_B على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتين A و B .

2− r دوران مركزه O ، و زاويته $\frac{\pi}{3}$

- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r .
- اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ، ثم أنشئ النقطة A' .

3− h تحاك مركزه O ، و نسبته $\frac{-3}{2}$

- اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h ، ثم أنشئ النقطة B' .

4− ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ ، و R نصف قطرها ، و z_ω لاحقة النقطة ω .

أ) باستعمال الخاصة : $z\overline{z}=\left|z\right|^2$ تحقق من صحة العبارات التالية

$$z_\omega\overline{z_\omega}=R^2 : \quad \left(z_\omega+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\omega}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2 \quad ، \quad \left(z_\omega-2i\right)\left(\overline{z_\omega}+2i\right)=R^2$$

ب) استنتج أن : $z_\omega-\overline{z_\omega}=2i$ و $z_\omega+\overline{z_\omega}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$

ج) استنتج z_ω لاحقة النقطة ω و قيمة R .

تمرين 2 :(4 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-6y=3$ .... (1)

1− أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3.

- استنتج حلا خاصا للمعادلة (1).

2− حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) ، ثم استنتج حلول الجملة : $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

3− عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x^2-y^2\leq 56$.

4− a و b عددان طبيعيان حيث :

$A=\overline{1\alpha0\alpha00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $B=\overline{\alpha\beta0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثنائية (A,B) حلا للمعادلة (1).

تمرين 3 : (4 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = 1$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1+U_n}$.

1- احسب U_1 ، U_2 ، U_3.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n < 2$.

3- أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة ، حدد نهايتها.

4- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 1 - \dfrac{2}{U_n}$.

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب V_n بدلالة n، ثم استنتج U_n بدلالة n.

جـ) تحقق من نهاية U_n المحسوبة في السؤال 2.

د) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

تمرين 4 : (7 نقاط)

الجزء الأول : h دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ : $h(x) = \ln(x+1) - x$.

1- ادرس تغيرات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ أن : $\ln(1+x) \le x$.

الجزء الثاني : f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1- احسب $f'(x)$ ، ثم استنتج من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ اتجاه تغير الدالة f.

2- أثبت من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ أن : $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$

- استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3- g_k دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ : $g_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، حيث $k \in]0, +\infty[$.

(C_k) التمثيل البياني للدالة g_k في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- أثبت من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ أن : $g_k(x) = \ln(1 + kxe^{-x})$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} g_k(x)$

- ادرس اتجاه تغير الدالة g_k ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أثبت من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ أن : $g_k(x) \le \dfrac{k}{e}$ ، (يمكن الاستعانة بالجزء الأول)

5- أكتب معادلة المماس (d) عند النقطة فاصلتها 0 .

6- p, m عددان حقيقيان موجبان تماما ، حيث $p < m$

- ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_p) ، (C_m).

- ارسم في نفس المعلم المنحنين (C_1) و (C_2) .