# امتحان بكالوريا التجريبي

**17 ماي 2008**

الشعبة: تقني رياضي + رياضيات

اختبار في مادة الرياضيات

## الموضوع الاختياري الأول

### التمرين الأول: (04 ن)

نعتبر *من أجل كل عدد طبيعي* n: $A_n = 4C_n^2 + 8C_n^3 + \cdots + 2^n C_n^n$ .

**1-** بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $A_n = 3^n - 2n - 1$.

**2-** أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$.

**3-** أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة $3^n$ على 5.

ب/ عين الأعداد الطبيعية $n$ حيث: $A_n \equiv 0[5]$.

### التمرين الثاني: (05 ن)

الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(1,1,0)$ , $B(2,0,-1)$ , $C(0,3,-1)$ , $D(-1,4,0)$.

**1-** بين أن الرباعي *ABCD* متوازي أضلاع.

**2 -** أ/ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي *(ABC)*.

ب/ بين أن: $x - 4y + 5z + 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي *(Q)* الذي يشمل المستقيم *(AB)* و العمودي على المستوي *(ABC)* ، ثم استنتج تقاطع المستويين *(Q)* و *(ABC)*.

جـ/ أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $\Omega(-2, 0, -3)$ و العمودي على *(Q)*.

**3-** أ/ أوجد معادلة ديكارتية لسطح الكرة *(S)* التي مركزها $\Omega$ و المماسة للمستوي *(ABC)*.

ب/ أدرس تقاطع سطح الكرة *(S)* و المستقيم $(\Delta)$.

### التمرين الثالث: (04 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $z^2 - 3\propto z + 17\propto = 0$ .......(*)    "$\propto$ عدد حقيقي"

**1-** أوجد قيم $\propto$ حتى تقبل المعادلة (*) حلين مركبين مترافقين.

**2-** حل في C المعادلة (*) من أجل $\propto = 2$.

**3-** نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، A , B , C, D أربع نقط لواحقها على الترتيب:

$a = 3 + 5i$ , $b = 3 - 5i$ , $c = 7 + 3i$ , $d = 5 - i$

**أ/** أكتب العدد المركب $\frac{b-c}{\mathrm{a-c}}$ على الشكل الأسي ، ثم احسب $\left(\frac{b-c}{\mathrm{a-c}}\right)^{2009}$.

**ب/** استنتج طبيعة المثلث ABC و أن BC = 2AC.

**جـ/** أوجد معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

**د/** *بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول $B$ إلى $A$ و $C$ إلى $D$ ، يطلب تعيين عناصره المميزة.*

## التمرين الرابع: (07 ن).

***I)*** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على R كما يلي: $\boldsymbol{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1}}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(\mathrm{o}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

**1-** **أ/** *تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ :* $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^{x}+1}$

**ب/** استنتج أن $f$ *دالة فردية.*

**2-** أحسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$.

**3-** **أ/** بين أنه من *أجل كل عدد حقيقي* $x$ : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$.

**ب/** شكل جدول تغيرات الدالة $f$ على $^{+}$ .

**جـ/** *استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب* $x$ : $\frac{1}{2}x \leq 1 - \frac{2}{e^{x}+1}$.

**4-** بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

**5-** أنشئ $(\Delta)$ و (C).

**6-** **أ/** تحقق أن الدالة: $x \longmapsto -\ln(e^{-x}+1)$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{e^{x}+1}$ على R.

**ب/** أحسب مساحة الحيز للمستوي المحصور بين المنحني (C) و محور الفواصل و و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -1 \;,\; x = 0$ .

***II)*** نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1}$

**1-** بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > 0$.

**2-** **أ/** تحقق باستعمال نتيجة السؤال 3- جـ/ أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

**ب/**استنتج أن المتتالية $(U_n)$ متناقصة.

**3**-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ، ثم أحسب نهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

## الموضوع الاختياري الثاني

### التمرين الأول: (04 ن)

يحتوي كيس على $n$ كرة بيضاء كلها تحمل الرقم 2 و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 0 , 1 , 1 , 2 ، لا نفرق بين كل الكرات في اللمس ، نسب في آن واحد كرتين.

**-1** عين العدد الطبيعي $n$ حيث يكون احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو $\frac{3}{7}$.

**-2** نضع: $n = 3$.

**أ/** أحسب احتمال الحصول على كرتين مختلفتين في اللون علما أنهما تحملان الرقم 2.

**ب/** نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية السحب مجموع الرقمين.

**-a** عين قيم X.

**-b** عين قانون احتمال X.

**-c** أحسب كل من الأمل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

**جـ/** نعيد التجربة "سحب كرتين في آن واحد" 8 مرات.

- احسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ثلاث مرات بالضبط.

### التمرين الثاني: (04 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود P(z) للمتغير المركب z حيث:

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i}.$$

**-1** **أ/** بين أن $i$ حلا للمعادلة P(z) = 0.

**ب/** أوجد العددين الحقيقين b , a حيث: $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

**جـ/** حل في C المعادلة: P(z) = 0.

**-2** نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، C , B , A ثلاث نقط لواحقها على الترتيب:

$$Z_A = i \quad , \quad Z_B = 2 + 3i \quad , \quad Z_C = 2 - 3i.$$

**أ/** عين اللاحقة $_E$ للنقطة E التي تحقق $Z_E - Z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z_A - Z_B)$.

**ب/** استنتج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى E و B إلى نفسها.

**-3** عين ( ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $3MA^2 - MB^2 - MC^2 = -12$.

### التمرين الثالث: (04 ن)

$\propto$ عدد حقيقي من المجال $]0,1[$ ،

نعتبر المتتالية $(U_n)$ المعرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = \frac{(1+\propto)u_n - \propto}{u_n}$.

**-1** **أ/** برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي $n$ : $u_n \geq 1$.

**ب/** بين أن المتتالية $(U_n)$ متناقصة.

**جـ/** استنتج أن $(U_n)$ متقاربة ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**2-** نعتبر المتتالية $(V_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{n-1}{u_n-\propto}$.

**أ/** بين أن $(V_n)$ هندسية أساسها $\propto$.

**ب/** أكتب $_n$ بدلالة $n$ و $\propto$ ، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ و $\propto$.

**جـ/** *تحقق من السؤال 1- جـ/ و ذلك بحساب* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

## التمرين الرابع: (08 ن)

**I)** $f$ دالة عددية معرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي: $\boldsymbol{f(x) = -x + \ln(x+1)}$.

$(C)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

**1- أ/** أحسب $\lim f(x)$ عند 1- بقيم أكبر ثم فسر النتيجة بيانيا

**ب/** أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

**جـ/** أدرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

**د/** استنتج أنه من أجل كل $x$ موجب تماما : $\ln(x+1) < x$.

**2-** حل في R المعادلة: $f(x) + x = 0$ ، ماذا تستنتج؟

**3-** بين أن (C) يقبل مماسا $(\Delta)$ معامل توجيهه 1، يطلب تعيين معادلته.

**4-** أحسب $f\left(\frac{7}{2}\right)$ , $f\left(\frac{13}{2}\right)$ ، ثم أنشئ $(\Delta)$ و (C).

**5- أ/** باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ على المجال $]-1,+\infty[$

**ب/** $\lambda$ عدد حقيقي من المجال $]-1,0[$.

- أحسب مساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلتها

$$x = \lambda \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = -x$$

- أحسب $\lim\limits_{\substack{\lambda \to -1 \\ >}} S(\lambda)$.

**6- أ/** باستعمال السؤال 1- د/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $\ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$.

**ب/** استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

**جـ/** أحسب: $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\boldsymbol{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}\right)$.