البكالوريا التجريبي في مادة الرياضي

التمرين الأول: (3,5 نقط)

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد صحيح n العددين $14n+3$ و $5n+1$ أوليان فيما بينهما .
استنتج أن العددين 87 و 31 أوليان فيما بينهما .
(2) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ المعادلة (E) ذات المجهول (x, y) الآتية: $87x+31y=2$
(أ) عين حلا (u, v) للمعادلة: $87u+31v=1$ ثم عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) .
(ب) عين في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ مجموعة الحلول (x, y) للمعادلة (E) .
(3) ليكن Δ مستقيم معادلته: $87x-31y-2=0$
- عين كل النقط $M(x, y)$ التي تنتمي إلى Δ حيث: $0 \leq x \leq 100$ و y عدد طبيعي كفي.

التمرين الثاني: (4,5 نقط)

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (الوحدة $2cm$)
- نذكر من أجل كل عددين مركبين a و b لدينا: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^3 = 8$
2. نعتبر A, B, C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب a, b, c حيث:
 $a = 2, b = -1 + i\sqrt{3}, c = -1 - i\sqrt{3}$
- نسمي r دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r' دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$
نضع $B' = r(B)$ و $C' = r(C)$ نرسم بالعددين b' و c' إلى لاحقتي النقطتين B' و C' على الترتيب .
(أ) مثل النقط A, B, C في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
(ب) أثبت أن $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$ ، وأن العددين b' و c' مترافقان.
3. نسمي النقط M, N, P, Q منتصفات القطع $[CB], [BB'], [B'C'], [C'C]$. ونرمز بالأعداد m, n, p, q إلى لواحقتها .
(أ) أثبت أن اللاحقة n للنقطة N تساوي $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$
استنتج أن أن النقط O, N, C على استقامة واحدة .
(ب) أثبت أن $n+1 = i(q+1)$. استنتج طبيعة المثلث MNQ .
(ت) أثبت أن الرباعي $MNPQ$ مربع .

التمرين الثالث: (5نقط)

- في الفضاء المنسوب بالمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3,0,10), B(0,0,15), C(0,20,0)$
1. (أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .
(ب) أثبت أن المستقيم (AB) يقطع محور الفواصل في النقطة $E(9,0,0)$.
• تحقق أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة .
2. ليكن (OH) ارتفاع المثلث OBC المتعلق بالضلع $[BC]$.
(أ) أثبت أن (BC) عمودي على المستوي (OEH) . استنتج أن (EH) هو ارتفاع المثلث EBC المتعلق بالضلع $[BC]$.
(ب) عين معادلة المستوي (OEH) .
(ت) تحقق أن المستوي (ABC) له معادلة من الشكل: $20x+9y+12z-180=0$.
(ث) أثبت أن الجملة $\begin{cases} x=0 \\ 4y-3z=0 \\ 20x+9y+12z-180=0 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا، ماذا يمثل هذا الحل ؟
(ج) أحسب الطول OH . استنتج أن $EH = 15$ ثم أحسب مساحة المثلث EBC .

3. بالتعبير عن حجم رباعي الوجوه $OEBC$ بطريقتين.
 - أحسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .
 - هل يمكن حساب هذه المسافة انطلاقا من السؤال (2. ت) ؟

التمرين الرابع: (7نقط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \dots\dots\dots x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$

- استنتج نهاية f عند $+\infty$.

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$. أثبت أن f مستمرة عند 0 .

4. (أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x + 1$

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$ ، حيث g دالة يطلب تعيينها .

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5. ليكن x عدد حقيقي غير معدوم و $M(x, f(x))$ ، $M'(-x, f(-x))$ نقطتان من المنحنى (C) .

(أ) تحقق أن $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$. عين عندئذ معامل توجيه المستقيم (MM') .

(ب) نفرض أن f قابلة للإشتقاق عند 0 . ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها سابقا ؟

6. أنشئ المنحنى (C) .

7. (أ) أثبت من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $x \leq f(x) \leq e^x$

(ب) استنتج حصرا للتكامل I حيث: $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2} f(x) dx$