الموضوع الأول

التمرين الأول:(04نقاط)

الأسئلة الأربعة مستقلة عن بعضها البعض. بين صحة أو خطأ من الجمل الآتية:

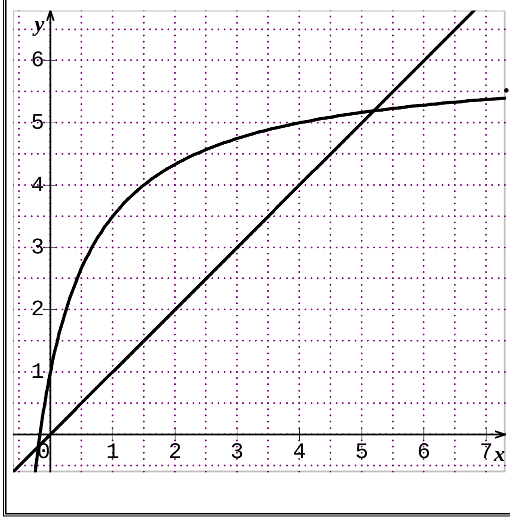
1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية: $(E)\cdots\cdots 2x+11y=7$.حلول المعادلة (E) هي فقط الثنائيات $(22k-2;-4k+1)$ حيث k عدد صحيح نسبي.
2. نعتبر العدد $N=11^{2012}$ ، العدد $N\equiv 4[7]$.
3. نعتبر في المستوي المركب النقاط A ، B و C ذات اللواحق $a=1+i$ ، $b=3i$ و $c=\left(1-2\sqrt{2}\right)+i\left(1-\sqrt{2}\right)$ ، النقطة C صورة B بالتشابه الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$.
4. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب $z_A=-i$ و $z_B=-1$ ، مجموعة النقط $M\left(z=x+iy\right)$ حيث $\dfrac{z+i}{z+1}$ عدد تخيلي صرف هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثاني:(05نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

1. أ. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.
   ب. عين في المجال $[0;+\infty[$ الحل α للمعادلة $f\left(x\right)=x$.
   ج. بين أنه إذا كان ينتمي x إلى المجال $[0;\alpha]$، فإن $f\left(x\right)$ ينتمي إلى المجال $[0;\alpha]$، وكذلك إذا كان x ينتمي إلى المجال $[\alpha;+\infty[$، فإن $f\left(x\right)$ ينتمي إلى المجال $[\alpha;+\infty[$.
2. $\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)=6-\dfrac{1}{u_n+1} \end{cases}$.

أ. على البيان المرفق مثلنا التمثيل البياني للدالة f والمستقيم ذو المعادلة $y=x$.
مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل.



ب. ما هو التخمين الذي يمكن وضعه حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية $\left(u_n\right)$.
ج. بين بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$ ،
استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين الثالث:(05نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين $A(-1;-1;1)$ و $B(-1;2;-2)$ والمستوي (P) معادلته الديكارتية $x+y+z-2=0$.

1) أ- بين أن المستقيم (AB) يوازي المستوي (P).

2) ليكن α عدد حقيقي و (S_α) مجموعة النقط من الفضاء حيث: $x^2+y^2+z^2+2x-2\alpha y+2\alpha z+\alpha^2+\alpha=0$.

أ. بين أنه من أجل عدد α، (S_α) سطح كرة مركزها $I_\alpha(-1;\alpha;-\alpha)$ ونصف قطرها $\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}$.

ب. بين أنه عندما يمسح α المجال ℝ، يمسح I_α المستقيم (AB).

3) أدرس تبعًا لقيم α الوضع النسبي لـ (S_α) والمستوي (P).

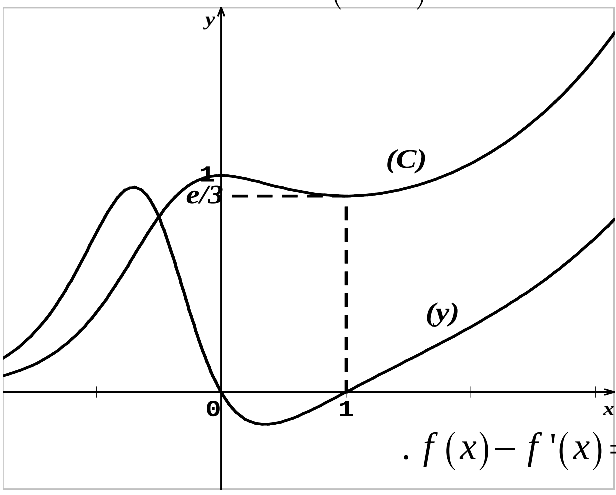
4) ليكن I منتصف $[AB]$ و $I_{1-\alpha}$ مركز سطح الكرة $(S_{1-\alpha})$.

أ. بين أن I منتصف القطعة $[I_\alpha I_{1-\alpha}]$.

استنتج أن سطحي الكرتين (S_α) و $(S_{1-\alpha})$ متناظرتين بالنسبة للنقطة I.

التمرين الرابع:(06نقاط)

في الشكل المقابل: (γ) و (C) التمثيلان البيانيان في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ لدالة f قابلة للإشتقاق على ℝ ولدالتها المشتقة f' .



1. بقراءة بيانية:

أ. حدد من بين المنحنيين (γ) و (C)، الذي يمثل الدالة f' .

ب. حدد $f(0)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

ج. أكتب جدول تغيرات الدالة f .

2. نقبل أن الدالة f معرفة على ℝ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x+x^2}$.

أ. أحسب $f'(x)$ من أجل x من ℝ.

ب. بين أنه من أجل كل x من ℝ لدينا: $f(x)-f'(x)=f(x)\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

ج. استنتج نقطة تقاطع المنحنيين (γ) و (C).

د. بين أنه من أجل كل $x\geq-\dfrac{1}{2}$ لدينا: $f(x)-f'(x)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

3. ليكن t عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1.

$A(t)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=-\dfrac{1}{2}$ و $x=t$.

أ. بين أن $A(t)\geq\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(1+t+t^2\right)-\dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

ب. استنتج $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(03نقاط)

لتكن المعادلة $(E):7x-6y=1$ ، حيث x و y عددان طبيعيان.

1. أعط حلاً خاصًا للمعادلة (E).
2. حدد مجموعة ثنائيات الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E).
3. أكتب العدد 2012 في النظام ذي الأساس 5.
4. أكتب $\overline{1433}^{6}$ في النظام العشري.

التمرين الثاني:(04نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقاط: $A(1;2,-1)$ ، $B(-3;-2,3)$ و $C(0;-2,-3)$ والشعاع $\vec{n}(2,-1,1)$.

1- بين أن النقاط A ، B و C تعين مستويا (ABC) وأن $\vec{n}$ ناظمي له.

2- ليكن المستوي ذو المعادلة $(P):x+y-z+2=0$: بين أن المستوي (ABC) و (P) متعامدان.

3- نسمي G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$

أ- عين إحداثيات النقطة G .

ب- بين أن المستقيم (CG) عمودي على (P) ، ثم اوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CG).

ج- حدد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (P) و (CG).

4- أوجد (S) مجموعة النقاط M من الفضاء حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ موضحًا عناصرها المميزة.

5- بين أن: (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

التمرين الثالث:(04نقاط) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z^2-6z+9=0$.
2. أنشئ النقط P ، Q و R ذات اللواحق $z_P=\frac{3}{2}(1+i)$ ، $z_Q=\frac{3}{2}(1-i)$ و $z_R=-2\sqrt{3}\,i$.
3. S نظيرة النقطة R بالنسبة للنقطة Q. تحقق أن لاحقة S هي $z_S=3+i\left(2\sqrt{3}-3\right)$.
4. ليكن r الدوران ذو المركز O والزاوية $\frac{\pi}{2}$.
   حدد اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C ، صورتي النقطتين R و S على الترتيب بالدوران r.
5. لتكن B و D صورتي النقطتين S و R على الترتيب بالإنسحاب الذي شعاعه $3\vec{v}$.
   أحسب z_B و z_D لاحقتي النقطتين B و D ،
6. أ. بين أن $\frac{z_C-z_P}{z_B-z_P}=i$.
   ب. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث:(05نقاط)

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. نسمي f_n الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\ln\left(1+x^n\right)$ ونضع $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)dx$.

(C_n) التمثيل البياني للدالة في المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ. حدد نهاية f_1 عند $+\infty$.

ب. أدرس تغيرات الدالة f_1 على $[0;+\infty[$.

جـ - باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب I_1 وفسر النتيجة بيانيًا.

(يمكن الاستعانة بـ: من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$)

2. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $0\le I_n\le \ln 2$.

ب. بين أن $0\le I_{n+1}\le I_n$، ثمّ استنتج إتجاه تغير المتتالية (I_n).

جـ. استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة.

3. لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(1+x)-x$.

أ. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $[0;+\infty[$.

ب. استنتج إشارة g على $[0;+\infty[$. بين أنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n، ومن أجل كل عدد حقيقي موجب x: $\ln(1+x^n)\le x^n$.

ج. استنتج نهاية المتتالية (I_n).

التمرين الخامس:(04نقاط)

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2-2+\ln x$.

أ- أحسب نهاية g عند 0 وعند $+\infty$. وشكل جدول تغيرات الدالة g.

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث: $1{,}3<\alpha<1{,}4$، واستنتج أن $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

ج- حدد إشارة $g(x)$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+\left(2-\ln x\right)^2$.

أ- عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، ثم استنتج تغيرات الدالة f.

ب- أحسب نهايات الدالة عند 0 و $+\infty$.

ج- أحسب $f(\alpha)$ واستنتج حصرًا له.

د- أرسم (C_f) في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

هـ- بين أن الدالة: $x\mapsto \frac{1}{3}x^3+10x-6x\ln x+x\ln^2 x$ دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمستوي (C_f) والمستقيمات: $y=0$، $x=\alpha$ و $x=1$.