التمرين الأول: (05ن)

نعتبر كثير حدود $P(z)$ حيث Z عدد مركب ، $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i$ ،

1. بين أن $P(z)$ يقبل جذر تخيلي صرف يطلب تعيينه

2. بين أن $P(z)$ يقبل جذرين مرافقين يطلب تعيينهما.

3. استنتج جذور $P(z)$

4. نعتبر النقط A, B, C لواحقها $1+i, 1-i, 2i$ على الترتيب ونعتبر العدد المركب L حيث $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

أ. عين طول وعمدة L وفسر النتائج هندسيا

ب. استنتج زاوية ونسبة التشابه S الذي يحول B إلى C ومركزه A

5. عين قيم n بحيث يكون $(L)^n$ عدد حقيقي ، عدد تخيلي صرف

6. احسب L^{2010}, L^{1431}

التمرين الثاني: (03.5ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; i; j; k)$

$$(E): \left\{ M(x; y; z) / (x+y+z+1)^2 + (x-y+2)^2 = 0 \right\}$$

نعتبر المعادلتين التاليتين :

$$(F): \left\{ M(x; y; z) / (x+y+z+1)^2 - (x-y+2)^2 = 0 \right\}$$

1. بين أن (E) هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له

2. بين أن (F) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب إعطاء معادلتيهما ثم تحقق أن $(P_1) \cap (P_2) = (E)$

3. نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتيّة:

$$(P_m): (1+m)x + (m-3)y + (m-1)z + m + 3 = 0$$

أ. تحقق أن (P_m) يحوي (E)

ب. هل كل مستوي يحوي (E) هو المستوي (P_m) ؟ برر .

التمرين الثالث: (03.5ن)

ليكن x, y عددين طبيعيين ولنعتبر المعادلة (1)..... $409x - 68y = 17$

1. برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (1) فإن 17 يقسم x .

2. عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) بحيث $0 < x_0 \leq 30$ ثم استنتج حلول المعادلة (1) .

3. لتكن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (1)

أ. برهن أن حاصل قسمة y على x مستقل عن x و y (إرشاد : $409 = 68 \times 6 + 1$)

ب. برهن أنه إذا كان $PGCD(x; y) = 17$ فإن باقي قسمة y على x هو من مضاعفات العدد 17

التمرين الرابع: (08)

نعتبر الدالة g المعرفة على $\left] \frac{-1}{2}; +\infty \right[$ بـ: $g(x) = \frac{1-2x}{1+2x}$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; i; j)$

1. أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
2. عين نقاط تقاطع (C_g) مع محوري الإحداثيات ثم أرسم (C_g)
3. عين العددين الحقيقيين $a; b$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $g(x) = a + \frac{b}{1+2x}$
- ثم استنتج دالة أصلية لـ g التي تتعدم من أجل $x = 0$ ولتكن $h(x)$
4. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها كالتالي : $x = 0, x = 1, y = -1$
5. أدرس تغيرات الدالة h على I .
6. بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1; 2]$ نرمز له بـ α
7. نضع $h(x) = f(x) - x$

أ. بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب. بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; \alpha[$ فإن $f(x)$ من المجال $]0; \alpha[$

8. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $u_n \in]0; \alpha[$.
- ب. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة .
- ج . استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .