الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية ثانوية : فارس بن مهل الشهبونية بالمدية

امتحان بكالوريا تجريبي دورة : **ماي 2015**

الشعبة : **علوم تجريبية**

اختبار في مادة : **الرياضيات** المدة : **03 ساعات و 30 د**

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

## الموضوع الأول

### التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط

$A\left(1;0;2\right)$ ، $B\left(\frac{1}{3};\frac{-8}{3};\frac{2}{3}\right)$ ، $C\left(-3;-1;-1\right)$ ، $D\left(1;-1;4\right)$

و المستوي $(P)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي $\begin{cases} x = 1+3\alpha+\beta \\ y = 1+3\alpha \\ z = 2-3\beta \end{cases}$ حيث $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان

1) أ) بيّن أنّ النقط $A$ , $B$ , $C$ تعين مستويا .

ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;1;-3\right)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ، ثمّ أكتب معادلة ديكارتية له .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ ، ثم بيّن أنّ $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان .

3) نعتبر المستقيم $(\Delta)$ المعرف بالجملة : $\begin{cases} 2x+y-3z+4=0 \\ 3x-3y+z-2=0 \end{cases}$

أ) تحقق أنّ $E\left(-2;-3;-1\right)$ نقطة من $(\Delta)$ .

ب) بيّن أنّ $\vec{u}\left(8;11;9\right)$ شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ ثم أكتب تمثيلا وسيطيا لـ $(\Delta)$ .

4) أ) أحسب المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$ .

ب) بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم ، ثمّ أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ .

### التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$ .

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ : $1 < u_n < 2$ .

ب) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=\ln\left(u_n-1\right)$ .

أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب كلا من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $P_n=\left(u_0-1\right)\times\left(u_1-1\right)\times\cdots\times\left(u_n-1\right)$ .

- أكتب $P_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n$ .

## التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير $p(z)$ ذات المتغير $Z$ حيث : $p(z)=z^3-6z^2+4z+40$ .

أ) عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حيث : $p(z)=(z+2)(z^2+az+b)$ .

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .

نعتبر النقط $A$ , $B$ و $C$ ذات اللواحق : $Z_A=-2$ , $Z_B=4+2i$ , $Z_C=5-i$ .

أ) أكتب العدد المركب على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

ب) أحسب قيمة العدد : $\left(\frac{L}{2}\right)^{2015}+i\left(\frac{L}{2}\right)^{1962}$ .

ج) أوجد قيمة العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $L^n$ عدد حقيقي موجب تماما .

3) ليكن $f$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $Z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $Z'$ حيث : $Z'=-2iZ+10i$

أ) عيّن طبيعة التحويل $f$ محددا عناصره المميزة .

ب) أكتب العبارة المركبة للدوران الذي مركزه $B$ و زاويته $\theta=-\frac{\pi}{2}$ .

ج) أوجد لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالدوران $r$ .

د) بيّن أن النقط : $A$ , $B$ و $C$ على استقامية ، ثم استنتج أن التحويل $f$ مركب من تحويلين يطلب تعيينهما .

## التمرين الرابع : (04 نقاط)

I) نعتبر الدّالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x-2$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $1,59\langle\alpha\langle1,60$ .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

II) نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1} \ , \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة عند القيمة $x_0=0$ .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة .

3) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم فإنّ : $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(e^x-1)^2}$ .

ب) أستنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ و شكل جدول تغيّراتها .

5) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

ب) ليكن $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $K$ المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ : $K(x)=-x^2$

- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-K(x)\right]$ ، ماذا تستنتج ؟

- أدرس الوضعية النسبية لـ $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Gamma)$ على المجال $]-\infty;0]$ .

ج) أرسم $(\Gamma)$ و $(C_f)$ .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة التالية : $x^2-me^x+m=0$ .

# الموضوع الثاني :

## التمرين الأول : (04 نقاط )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوي $(P)$ ذو المعادلة $2x+y-2z+4=0$
و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$

1) أ) بيّن أنّ النقط $A$ , $B$ , $C$ تعيّن مستوي .

ب) تحقق أنّ المستوي $(P)$ هو المستوي $(ABC)$ .

2) أ) بيّن أنّ المثلث $ABC$ قائم .

ب) أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $O$ والعمودي على المستوي $(P)$ .

ج) لتكن النقطة $K$ المسقط العمودي للنقطة $O$ على $(P)$ . أحسب المسافة $OK$ .

د) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCO$ .

3) أ) أوجد إحداثيتي النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$ .

ب) نرمز بـ $I$ إلى مركز ثقل المثلث $ABC$ . بيّن أنّ $G$ تنتمي إلى المستقيم $(OI)$ .

ج) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء والتي تحقق $\left\| 3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\|=5$ .

- عين $(\Gamma)$ وما هي مجموعة النقط المشتركة بين $(\Gamma)$ و $(P)$ .

## التمرين الثاني : (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$ .

1) أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيمين $(D): y=\frac{2}{3}x+1$ و $(\Delta): y=x$ .

ب) مثّل على محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3$ . ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها .

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ : $u_n > 3$ .

د) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ . ماذا تستنتج حول تقاربها ؟

2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n$ المتتالية $(v_n)$ حيث : $v_n=2^n.3^{1-n}$ .

أ) بين أنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإنّ : $v_n=u_n-3$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

3) لتكن $(w_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=\ln v_n$ .

أ) بين أنّ $(w_n)$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) ليكن المجموع : $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\dots\dots+\frac{u_n}{v_n}$ . بين أن : $S_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+n-1$ .

**التمرين الثالث :** (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ و $I$ ذات اللواحق : $Z_A = i$ , $Z_B = \overline{Z_A}$ , $Z_C = -1+\sqrt{3}i$ , $Z_D = \overline{Z_C}$ ، $I$ منتصف $[CD]$ .

1) مثل النقط في المعلم .

2) أ) أكتب العدد $L$ على الشكل الأسي ، حيث : $L = \dfrac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ .

ب) استنتج طبيعة المثلث $ABI$ .

ج) عيّن المركز $\omega$ و نصف القطر $r$ للدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABI$ ، ثمّ أنشئ الدائرة $(C)$ .

3) ليكن $R$ دوران مركزه $I$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ، $h$ التحاكي الذي يحول $A$ إلى $C$ و يحول $B$ إلى $D$ .

أ) عيّن العبارة المركبة لكل من $R$ و $h$ .

ب) ما هي طبيعة التحويل $h \circ R$ محددا عبارته المركبة و عناصره .

ج) عيّن معادلة $(C')$ صورة $(C)$ بالتحويل $h \circ R$ مستعملا طريقتين .

**التمرين الرابع :** (07 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدة الطول $2cm$ .

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ .

2) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = 0$ ، ثم استنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

3) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$

ثم أدرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

4) أدرس تغيرات الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها .

5) أكتب معادلة المماس $(T)$ عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ .

6) بيّن أن المنحنى $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 0$ .

7) أرسم المنحنى $(C_f)$ و المستقيمان $(T)$ و $(\Delta)$ .

8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ حلول المعادلة $f(x) = \dfrac{3}{2}x + m$ .

9) أ) بين أن الدالة $F_a : x \to (x+a)\ln(x+a) - x$ هي دالة أصلية

للدالة $f_a : x \to \ln(x+a)$ على المجال $]-a\,;+\infty[$ .

ب) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات $y = x+1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$ .