متقن الخوارزمي قصر البخاري — امتحان بكالوريا تجريبي دورة ماي 2013

الشعبة: علوم تجريبية — اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03سا ونصف

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليّين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن):

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = -6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

أ) 1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

2) برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ ، $u_n > 0$

- استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $u_n > 2n - 3$

3) ما هي نهاية (u_n) ؟

ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 4n + 10$.

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

التمرين الثاني (05 ن):

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات $Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب .

أ – علم النقط A ، B ، C و D .

ب – اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ - تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D.

أ – اثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .

ب – تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C.

4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1، -1، 2 على الترتيب.

أ – عين احداثيي النقطة G.

ب – بين ان (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$ هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثالث (04 ن):

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;0;2)$ ؛ $B(0;1;2)$ ؛ $C(1;-2;0)$

و المستوي (p) الذي معادلته $3x - 2y + z + 3 = 0$.

1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

2) أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان .

ب) بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعرف بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t \quad ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$

جـ) أحسب المسافة بين النقطة $H(-1;6;-2)$ و المستوي (ABC) ،

ثم بين أن المسافة بين النقطة H و المستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 12y + 4z + 3 = 0$

أ) بين أن (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب) ما هو الوضع النسبي للمجموعة (Γ) و المستقيم (Δ)

التمرين الرابع(07 ن):

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$.

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ،

ثم أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟

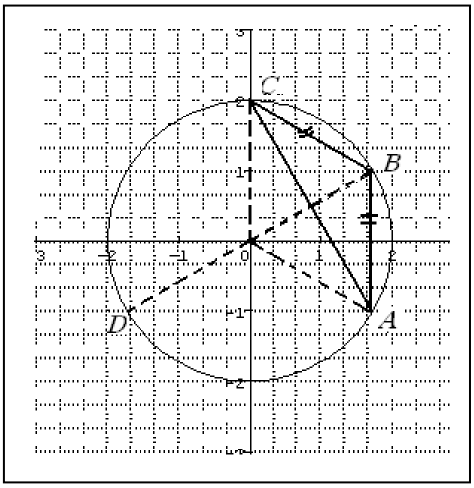
8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$

9) أ - بين أن الدالة $F_a : x \to (x+a)\ln(x+a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $f_a : x \to \ln(x+a)$

على المجال $]-a;+\infty[$

ب - احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

انتهى و حظ سعيد

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: كاملة
التمرين الأول	أ) 1) حساب الحدود : $u_0=-6$ ، $u_1=-4$ ، $u_2=-1$ و $u_3=\frac{5}{2}$. 2) البرهان بالتراجع : من أجل $n\geq 3$ ، $u_3=\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2}>0$ إذن $u_n \geq 3$ محققة من أجل $n\geq 3$. لدينا $u_n>0$ ومنه $\frac{1}{2}u_n>0$ و $2n-1\geq 5>0$ إذن $\frac{1}{2}u_n+2n-1>0$ إذن $u_{n+1}>0$ - الاستنتاج : من أجل $n\geq 4$ فان $n-1\geq 3$ أي أن $u_{n-1}>0$ ومنه $\frac{1}{2}u_{n-1}>0$ نضيف إلى الطرفين نفس المقدار نجد $\frac{1}{2}u_{n-1}+2(n-1)-1>+2(n-1)-1$ إذن $u_n>2n-3$ 3) بمان $u_n>2n-3$ فان $\lim\limits_{x\to\infty}u_n>\lim\limits_{x\to\infty}(2n-3)$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}u_n=+\infty$ ب) 1) لدينا $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-4(n+1)+10}{u_n-4n+10}=\frac{\cancel{u_n-4n+10}}{2(\cancel{u_n-4n+10})}=\frac{1}{2}$ إذن $q=\frac{1}{2}$ و $v_0=4$ 2) لدينا $v_n=v_0.q^n$ ومنه $v_n=4.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ إي $v_n=2^{2-n}$ أي $2^{2-n}=u_n-4n+10$ إذن $u_n=2^{2-n}+4n-10$ 3) حساب المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ $=(v_0+4\times 0-10)+(v_1+4\times 1-10)+...+(v_n+4\times n-10)$ $=(v_0+v_1+...+v_n)+4(0+1+...+n)-10(n+1)$ $=2n^2-8n-2^{-n+2}-2$	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن	04 ن
التمرين الثاني	1) حلول المعادلة: لدينا $Z-2i=0$ أو $Z^2-2\sqrt{3}Z+4=0$ و $\Delta=-4$ أي $\sqrt{\Delta}=2i$ إذن $Z=2i$ أو $Z=\sqrt{3}-i$ أو $Z=\sqrt{3}+i$. 2) أ- تعليم النقط :  ب- لدينا الشكل الجبري $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}=\frac{-2i}{-\sqrt{3}+i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ لدينا $[r,\theta]=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$ إذن الشكل الآسي $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\left\|\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_D}\right\|=\frac{\|Z_A-Z_B\|}{\|Z_C-Z_D\|}=1$ إذن $\|Z_A-Z_B\|=\|Z_C-Z_D\|$ ومنه $BA=BC$ ومنه المثلث ABC متساوي الساقين. جـ - لدينا $\|Z_A\|=\|Z_B\|=\|Z_C\|=\|Z_D\|=2$ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r=2$	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن	05 ن

3) — 0.5 ن

أ) لدينا $\begin{cases} S(O)=A \\ S(C)=D \end{cases}$ و $Z'=aZ+b$ إذن $\begin{cases} Z_A=aZ_O+b \\ Z_D=aZ_C+b \end{cases}$ أي $a=\sqrt{3}i$ و $b=\sqrt{3}-i$

إذن $S:Z'=\sqrt{3}iZ+\sqrt{3}-i$ هو تشابه مباشر مركزه (النقطة الصامدة) لاحقتها $Z_w=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ — 0.5 ن

و نسبته $k=\left|\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$ وزاويته عمدة $\sqrt{3}i$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ب) $Z_C=\sqrt{3}iZ_B+\sqrt{3}-i$ أي $2i=\sqrt{3}i\left(\sqrt{3}+i\right)+\sqrt{3}-i$ إذن $2i=2i$ محققة — 0.5 ن

4) أ- بما أن $1-1+2\neq 0$ إذن G مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,-1);(C,2)\right\}$ ومنه $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أي $\left(Z_A-Z_G\right)-\left(Z_B-Z_G\right)+2\left(Z_C-Z_G\right)=0$ إذن $Z_G=i$ ومنه $G\left(0,1\right)$ — 0.5 ن

ب - لدينا $MA^2-MB^2+2MC^2=8$ ومنه $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=8$ — 0.5 ن

اي $2MG^2+2\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{MG}+GA^2-GB^2+2GC^2=8$ اذن $MG^2=1$ ومنه

مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة G ونصف قطرها 1 .

التمرين الثالث — 04 ن

1) أ) بما أن $\overrightarrow{AB}\left(-1;1;0\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(0;-2;-2\right)$ و $\frac{0}{-1}\neq\frac{1}{-2}$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا — 0.5 ن

ومنه أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) لدينا $\vec{n}\left(1;1;-1\right)\perp\overrightarrow{AB}\left(-1;1;0\right)$ و $\vec{n}\left(1;1;-1\right)\perp\overrightarrow{AC}\left(0;-2;-2\right)$ إذن $\vec{n}\left(1;1;-1\right)$ ناظمي — 0.5 ن

للمستوي $\left(ABC\right)$.نستنتج ان معادلة المستوي $\left(ABC\right)$ هي $x+y-z+1=0$.

2) أ) لدينا $\vec{n}\left(1;1;-1\right)$ و $\vec{n}_P\left(3;-2;1\right)$ متعامدان إذن المستويين $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$ متعامدان . — 0.5 ن

ب) لدينا جملة التقاطع $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 3x-2y+z+3=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} \left(t-1\right)+\left(4t\right)-\left(5t\right)+1=0 \\ 3\left(t-1\right)-2\left(4t\right)+z\left(5t\right)+3=0 \end{cases}$ إذن الجملة محققة. — 0.5 ن

جـ) المسافة بين النقطة H و المستوي $\left(ABC\right)$ هي $d=\frac{\left|(-1)+(6)-(-2)+1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ — 0.5 ن

المسافة بين النقطة H و المستوي $\left(P\right)$ هي $d'=\frac{\left|3(-1)-2(6)+(-2)+3\right|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ — 0.5 ن

و بما أن $d''^2=d'^2+d^2$ إذن $d''^2=\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\sqrt{14}\right)^2$ أي أن $d''=\sqrt{\frac{106}{3}}$

3) أ) لدينا مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ حيث : $x^2+y^2+z^2+2x-12y+4z+3=0$ — 0.5 ن

ومنه $\left[\left(x+1\right)^2-1\right]+\left[\left(y-6\right)^2-36\right]+\left[\left(z+2\right)^2-4\right]+3=0$

أي أن $\left(x+1\right)^2+\left(y-6\right)^2+\left(z+2\right)^2=38$.إذن المجموعة $\left(\Gamma\right)$ هي سطح كرة مركزها H — 0.5 ن

و نصف قطر $r=\sqrt{38}$.

ب) بما أن $\sqrt{\frac{106}{3}}<\sqrt{38}$ إذن المستقيم $\left(\Delta\right)$ يقطع الكرة $\left(\Gamma\right)$ في نقطتين هما بتعويض $\left(\Delta\right)$ في $\left(\Gamma\right)$

نجد $L_1\left(\frac{-14-2\sqrt{7}}{21};\frac{28-8\sqrt{7}}{21};\frac{35-10\sqrt{7}}{21}\right)$ و $L_2\left(\frac{-14+2\sqrt{7}}{21};\frac{28+8\sqrt{7}}{21};\frac{35+10\sqrt{7}}{21}\right)$

07 ن			التمرين الرابع

التمرين الرابع (07 ن)

1) $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(-1+1+\ln(-1+1)-\ln(-1+2)\right) = -\infty$. (0.5 ن)

2) لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$ (0.5 ن)

لدينا $f(x) = x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$ ومنه $f(x) = x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right) = +\infty$ (0.5 ن)

3) لدينا $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$ (0.5 ن)

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل . (0.5 ن)

في المجال $]-1;+\infty[$ لدينا $x+1 < x+2$ ومنه $\ln(x+1) < \ln(x+2)$ أي $\ln(x+1)-\ln(x+2) < 0$ أي $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < 0$ إذن $f(x)-y < 0$

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$-$
	(C_f) تحت (Δ)

(0.5 ن)

4) دراسة تغيرات الدالة f : الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالته المشتقة هي (0.5 ن)

$f'(x) = 1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ و منه $f'(x) = \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x+2)}$.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(x+1)(x+2)$	+
x^2+3x+3	+
$f'(x)$	+

(0.5 ن)

إذن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ (0.5 ن)

جدول التغيرات.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5) معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$: (0.5 ن)

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(T): y = \frac{3}{2}x+1-\ln 2$

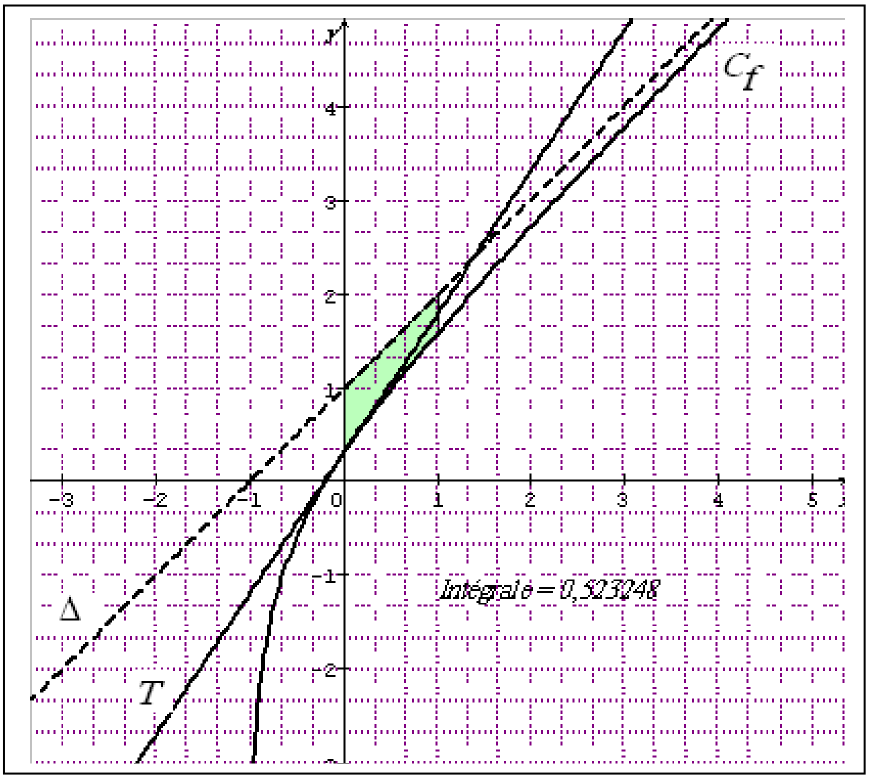
6) f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ ولدينا $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,6 < 0$ و $f(0) = 0,3 > 0$

و $f\left(-\frac{1}{2}\right) \bullet f(0) < 0$ إذن و حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

7) رسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ)

0.5 ن



0.5 ن

0.5 ن

8) <u>المناقشة البيانية</u> :

مناقشة حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}x+m$.

نلاحظ أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=\frac{3}{2}x+m$ موازي للمماس (T) ذي المعادلة $y=\frac{3}{2}x+1-\ln 2$

ومنه إذا كان $m=1-\ln 2$ فان $(D)=(T)$ إذن (C_f) و (D) يتقاطعان في نقطة وحيدة (نقطة التماس)

و إذا كان $m<1-\ln 2$ فان (C_f) و (D) يتقاطعان في نقطتين .

و إذا كان $m>1-\ln 2$ فان (C_f) و (D) لا يتقاطعان .

0.5 ن

9) <u>الدالة الأصلية</u> :

أ - لدينا $F_a(x)=(x+a)\ln(x+a)-x$

ومنه $F_a'(x)=\ln(x+a)-\frac{\cancel{x+a}}{\cancel{x+a}}-1=\ln(x+a)=f_a(x)$ على المجال $]-a;+\infty[$

ب - مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات $y=x+1$ ، $x=0$ ، $x=1$.

هو العدد الحقيقي الموجب $\int_0^1(\ln(x+2)-\ln(x+1))\,dx=\int_0^1(y-f(x))dx$

إذن $\left[(x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1=3\ln 3-4\ln 2\approx 0,5232481.....$