التمرين الأول:

نعتبر كثير حدود $P(z)$ حيث z عدد مركب المعرف بـ $P(z)=z^3-(7+i)z^2+(16+6i)z-10-10i$

1. بين أن $P(z)$ يقبل جذرين مترافقين يطلب تعيينهما
2. حلل $P(z)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$
3. نعتبر النقط $A;B;C$ ، لواحقها $1+i$, $3+i$, $3-i$ على الترتيب ، نضع $L=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$
   أ. احسب طويلة وعمدة العدد المركب L وفسر النتائج هندسيا .
   ب. استنتج أنه يوجد دوران r يحول A إلى C ومركزه B . يطلب تعيين زاويته .
4. نعتبر متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي $A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=r(A_n)$
   أ . أنشئ في المستوي المركب النقط A_0,A_1,A_2,A_3,A_4
   ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $A_{n+4}=A_n$.
   ج. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$
   • بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (u_n) متتالية ثابتة .

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقطة $A(2;-4;1)$ والمستقيم (Δ) حيث : $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=-1+t\end{cases}$

1. عين معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة A والمستقيم (Δ) .
2. عين إحداثيات النقطة C من (Δ) بحيث يكون $(AC)\perp(\Delta)$
3. تحقق أن النقطة $B(2;-3;0)$ نقطة من (Δ) ثم استنتج مساحة المثلث ABC
4. أحسب المسافة بين النقطة $D(0;0;2)$ والمستوي (P) ، ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
5. ادرس وضعية المستقيم (Δ) مع (AD)

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، $\left(\left\|\vec{i}\right\|=2cm\ ,\left\|\vec{j}\right\|=1cm\right)$

الجزء الأول :

g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$

1. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $0<x<1$ و $x>1$.
2. احسب نهايتي الدالة f عند 0 , $+\infty$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .
3. احسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة الدالة g
4. استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
5. أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

الجزء الثاني :

1. باستعمال تكامل التجزئة عين دالة أصلية للدالة x a $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
2. احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التالية: $y=-x+1$, $x=1$, $x=\alpha$ بحيث $0<\alpha<1$
3. احسب نهاية $S(\alpha)$ لما يؤول α إلى الصفر ، أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية .

الجزء الثالث :

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1;2]$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0\le\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$
2. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n \in [1;2]$
3. بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)
4. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، نسمي العدد l نهايتها
5. احسب بدقة قيمة l .

التمرين الرابع:

نعتبر كثير حدود $P(z)$ حيث Z عدد مركب ، $P(z)=z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i$

1. بين أن $P(z)$ يقبل جذر تخيلي صرف يطلب تعيينه
2. بين أن $P(z)$ يقبل جذرين مرافقين يطلب تعيينهما.
3. استنتج جذور $P(z)$
4. نعتبر النقط A,B,C لواحقها $1+i$, $1-i$, $2i$ على الترتيب ونعتبر العدد المركب L حيث $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$
   أ. عين طويلة وعمدة L وفسر النتائج هندسيا
   ب. استنتج زاوية ونسبة التشابه S الذي يحول B إلى C ومركزه A
5. عين قيم n بحيث يكون $(L)^n$ عدد حقيقي ، عدد تخيلي صرف
6. احسب L^{2010} , L^{1431}

التمرين الخامس:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المعادلتين التاليتين :

$$(E):\{M(x;y;z)/\quad (x+y+z+1)^2+(x-y+2)^2=0\}$$
$$(F):\{M(x;y;z)/\quad (x+y+z+1)^2-(x-y+2)^2=0\}$$

1. بين أن (E) هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له
2. بين أن (F) هي إتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب إعطاء معادلتيهما ثم تحقق أن $(P_1)\cup(P_2)=(E)$
3. نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية:
   $$(P_m):(1+m)x+(m-3)y+(m-1)z+m+3=0$$
   أ. تحقق أن (P_m) يحوي (E)
   ب. هل كل مستو يحوي (E) هو المستوي (P_m)؟ برر .

التمرين السادس:

نعتبر الدالة g المعرفة على $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ بـ: $g(x)=\frac{1-2x}{1+2x}$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
2. عين نقاط تقاطع (C_g) مع محوري الإحداثيات ثم أرسم (C_g)
3. عين العددين الحقيقيين $a;b$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $g(x)=a+\frac{b}{1+2x}$

ثم استنتج دالة أصلية لـ g التي تنعدم من أجل $x=0$ ولتكن $h(x)$

4. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها كالتالي : $x=0$, $x=1$, $y=-1$
5. أدرس تغيرات الدالة h على I .
6. بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;2]$ نرمز له بـ α
7. نضع $h(x)=f(x)-x$

أ. بين أن الدالة f متزايدة تماما على I.

ب. بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;\alpha[$ فإن $f(x)$ من المجال $[0;\alpha[$

8. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $u_n\in[0;\alpha[$.

ب. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة .

ج . استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

التمرين السابع:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ. حل في المجموعة C المعادلة : $\frac{z-2}{z-1}=z$

ب. أحسب طويلة وعمدة كل حل .

2. حل في المجموعة C المعادلة : $\frac{z-2}{z-1}=i$ (يعطى الحل على الشكل الجبري)
3. لتكن M,A,B النقط التي لواحقها على الترتيب $Z,1,2$ حيث M تختلف عن A و B

- فسر هندسيا عمدة وطويلة العدد : $\frac{z-2}{z-1}$

4. حل في المجموعة C المعادلة: $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2=i$

التمرين الثامن:

I- (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+4}$

1. احسب u_1 و u_2 .
2. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_n>0$
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن $(u_{n+1}-1)$ له نفس إشارة (u_n-1) ثم استنتج أن : $u_n<1$

4. أدرس إشارة $(u_{n+1}-u_n)$ وبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

II- (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

1. عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .
2. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين التاسع:

الجزء 1:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x$

1. ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء2 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. عين نهاية الدالة f بجوار 0 و $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول التغيرات .
3. أثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
4. تحقق أن المستقيم (D) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .
5. حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) في المجال $]0;+\infty[$.
6. أثبت أنه توجد نقطة وحيدة B للمنحنى (C_f) يكون المماس (T) عندها موازي للمستقيم (D) يطلب كتابة معادلة (T)
7. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,34<\alpha<0,35$.
8. ارسم (C_f) و (D) و (T)

الجزء3 :

(x_n)متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $x_n=e^{\frac{n-2}{2}}$.

1. برهن أن (x_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
2. أثبت أن (x_n) متزايدة .
3. من أجل كل عدد طبيعي نضع : $a_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)dx$

- احسب a_n .