وزارة التربية الوطنية ثانوية ابن زياد المختلطة

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : الثالثة علوم تجريبية التاريخ:28/ 02/ 2009 المدة: 3ساعات
الثالثة تقني رياضي

التمرين1:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس متعامد $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(-1,1,2)$ ، $B\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ و $C(0,3-1)$

و المستقيم (D) ذو المعادلتين : $\begin{cases}2x-y+3=0\\ y+2z-1=0\end{cases}$

1. أكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (D) ،ثم عين $\vec{u}$ شعاع توجيه له.
2. بين أن C تنتمي إلى (D) و أن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.
3. عين شعاع $\vec{n}$ عمودي على الشعاعان: $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$
4. أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و المستقيم (D).
5. أحسب المسافة d بين النقطة B و المستوي (P).
6. أكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (D') الذي يشمل النقطتين A و B .
7. أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D').

التمرين2:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن النقطتان A ، B صورتي العددين المركبين z_A, z_B حلي المعادلة:

$$z^2+2\sqrt{3}z+4=0$$

1. عين z_A, z_B حلي المعادلة علما أن : $\mathrm{Im}(z_A)>0$.
2. أكتب z_A, z_B على الشكل الأسي.
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_A^{6n+1}+z_A=0$
4. لتكن النقطتان C و w صورتي $z_c=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ و $z_w=\frac{z_A+\overline{z_A}}{2}$.

a) أحسب : $Arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_c-z_B}\right)$ و استنتج نوع المثلث ABC

b) استنتج أن w هي مركز ثقل المثلث ABC .

أ/هندسية ب/حسابية

c) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$.

d) عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

التمـرين3:

I/ لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,1]$ كمايلي: $g(x)=\ln(x+1)-x$

1. أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول التغيراتها .
2. استنتج حسب قيم x الحقيقية إشارة $g(x)$.

II/نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية IN كمايلي:

$u_0=1$ و من أجل كل $n\in IN$ فإن: $u_{n+1}=\ln(u_n+1)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in IN$ فإن: $0<u_n\leq 1$.
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

التمـرين4:

I/ لتكن الدالة العددية φ المعرفة على IR كمايلي: $\varphi(x)=\frac{1}{2}x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$

3. أدرس تغيرات الدالة φ ، ثم شكل جدول التغيراتها .
4. استنتج حسب قيم x الحقيقية إشارة $\varphi(x)$.

II/ لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR كمايلي::

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right); six\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحني الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متجانس متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أثبت أن f مستمرة عند القيمة 0
2. بين أنه :من أجل كل $x\in IR-\{0\}$ فإن: $f'(x)=\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}\times\varphi(x)$
3. أدرس تغيرات الدالة f . ثم شكل جدول التغيرات .
4. أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$. ماذا تستنتج؟
5. أرسم المنحنى (C).
6. حل وناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+m$$

بالتوفيق

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية			
وزارة التربية الوطنية	ثانوية:ابن زياد المختلطة		
الإجابة النموذجية لامتحان المستوى ثالثة تقني رياضي			
المادة : رياضيات	المدة:3ساعات		
محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة	
		مجزأة	كاملة

التمرين الأول

لدينا: $A(-1,1,2)$ و $B\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ و $C(0,3,-1)$ و المستقيم (D) الذي معادلتاه $\begin{cases}2x-y+3=0\\y+2z-1=0\end{cases}$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) ثم تعيين $\vec{u}$ شعاع توجيه له

نضع $x=t$ ومنه: $\begin{cases}x=t\\2t-y+3=0\\y+2z-1=0\end{cases}$ وعليه: $\begin{cases}x=t\\y=2t+3\\z=-t-1\end{cases}$ $t\in IR$

ومنه: شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

2. تبيان أن $C\in(D)$ و أن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا

لدينا: $t\in IR$ ومنه: $\begin{cases}0=t\\3=2t+3\\-1=-t-1\end{cases}$ $t\in IR$ أي: $C\in(D)$ $\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}$

لدينا: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0+1\\3-1\\-1-2\end{pmatrix}$ ومنه: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

نلاحظ: لا يوجد $k\in IR$ بحيث $\overrightarrow{AC}=k\vec{u}$

ومنه: $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا

3. تعيين شعاع $\vec{n}$ عمودي على الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

نضع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ومنه: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=a+2b-c\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=a+2b-3c\end{cases}$ وعليه: $\begin{cases}a+2b-c=0\\a+2b-3c=0\end{cases}$

نضع $a=1$ ينتج: $\begin{cases}2b-c=-1\\2b-3c=-1\end{cases}$

بالطرح نجد $2c=0$ ومنه: $c=0$ بالتعويض نجد: $b=-\frac{1}{2}$

وعليه: $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

4. كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يشمل المستقيم (D)

لدينا $\vec{n}\perp(P)$ كون: $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي $A\notin(D)$

أي (P) معين بالنقطة A و المستقيم (D) مع $A\notin(D)$

ومنه: $(P):1x-\frac{1}{2}y+0z+d=0$ وعليه: $(P):x-\frac{1}{2}y+d=0$

تعيين d لدينا: $A\in(P)$ ومنه: $-1-\frac{1}{2}\times1+d=0$ وعليه: $d=\frac{3}{2}$

ينتج: $(P):x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}=0$

5. حساب المسافة d بين النقطة B و المستوي (P)

لدينا: $d=\frac{\left|x_B-\frac{1}{2}y_B+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}}$ ومنه $d=\frac{\left|1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}$

وعليه: $d=\frac{9}{2\sqrt{5}}$

6. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D') الذي يشمل النقطتين A,B

لدينا: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+1\\ \frac{1}{2}-1\\ 0-2\end{pmatrix}$ ومنه: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ -\frac{1}{2}\\ -2\end{pmatrix}$

لتكن: $M(x,y,z)\in(D')$ ومنه: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

وعليه: $\begin{cases}x+1=2\lambda\\ y-1=-\frac{1}{2}\lambda\\ z-2=-2\lambda\end{cases}$ ومنه: $(D'):\begin{cases}x=2\lambda-1\\ y=-\frac{1}{2}\lambda+1\\ z=-2\lambda+2\end{cases}$

7. دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D')

لدينا: $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ و $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\ -\frac{1}{2}\\ -2\end{pmatrix}$

ومنه: $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطان خطيا

وعليه: المستقيمان (D) و (D') متقاطعين أو ليسا من نفس المستوي.

نضع: $\begin{cases}2\lambda-1=t\\ -\frac{1}{2}\lambda+1=2t+3\end{cases}$ ومنه: $-\frac{1}{2}\lambda+1-4\lambda+2=2t+3-2t$

وعليه: $-\frac{9}{2}\lambda=0$ ومنه: $\lambda=0$

بالتعويض نجد: $t=-1$

وعليه: لدينا $M_{D'}(-1,1,2)$ و $M_D(-1,1,0)$

أي: (D) و (D') ليسا من نفس المستوي

<u>التمرين الثاني:</u>

a. تعيين z_B,z_A حلي المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

لدينا: $\Delta = b^2 - 4ac = 12 - 16 = -4 = (2i)^2$

ومنه: $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{2} = -\sqrt{3}+i \\ z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{3}-2i}{2} = -\sqrt{3}-i \end{cases}$

و بما أن: $\mathrm{Im}(z_A) > 0$ ومنه: $\begin{cases} z_A = -\sqrt{3}+i \\ z_B = -\sqrt{3}-i \end{cases}$

b. كتابة z_B, z_A على الشكل الآسي

لدينا: $|z_A| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

و بما أن: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه: $\arg(z_A) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

وعليه: $z_A = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

ولدينا: $|z_B| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

و بما أن: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$ ومنه: $\arg(z_A) = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$

وعليه: $z_B = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$

c. تبيان أنه من أجل $n \in IN$ فان $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{6n+1} + \dfrac{z_A}{2} = 0$

لدينا: $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{6n+1} + \dfrac{z_A}{2} = \left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{6n} \times \dfrac{z_A}{2} + \dfrac{z_A}{2}$

و بما أن: $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{6n} = \left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{6n} = (\cos(5\pi m) + i\sin(5\pi m)) = -1$

ومنه: $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{6n+1} + \dfrac{z_A}{2} = -\dfrac{z_A}{2} + \dfrac{z_A}{2} = 0$

d. لتكن النقطتان C و w صورتي $z_c = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

و $z_w = \dfrac{z_A + \overline{z_A}}{2}$.

e) أحسب : $Arg\left(\dfrac{z_c - z_A}{z_c - z_B}\right)$ و استنتج نوع المثلث ABC

لدينا: $\left(\dfrac{z_c - z_A}{z_c - z_B}\right) = \dfrac{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} + \sqrt{3} - i}{-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} + \sqrt{3} + i} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i}$

لدينا: $\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}[2\pi]$

ولدينا: $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$

و لدينا: $\begin{cases}\cos\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ $\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

وعليه:

$$Arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_c-z_B}\right)=\frac{7\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi-4\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

إذن: المثلث ABC قائم في النقطة C

b. استنتج أن w هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

أ/هندسية

بما أن المثلث ABC قائم في النقطة C و w منتصف وتره $[AB]$

فإن: w هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

ب/حسابية

لدينا: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=|z_B-z_A|=|-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i|=|-2i|=2$

وعليه: $wA=wB=\frac{2}{2}=1$

من جهة لدينا:

$$\left\|\overrightarrow{Cw}\right\|=|z_w-z_C|=\left|\frac{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

أي: $wA=wB=wC$

و عليه: w هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

c. تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$

$$z_G=\frac{2z_A-z_B+z_C}{2-1+1}$$

$$z_G=\frac{2\left(-\sqrt{3}+i\right)-\left(-\sqrt{3}-i\right)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)}{2}$$

لدينا:

$$z_G=\frac{-2\sqrt{3}+2i+\sqrt{3}+i-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}{2}$$

$$z_G=\frac{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{7i}{2}}{2}$$

$$z_G=-\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{7i}{4}$$

ومنه: $G\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4};\frac{7}{4}\right)$

• تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2$

ومنه: $\left\|2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right\|=2$

$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=2$

وعليه:

$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=1$

ومنه: مجموعة النقط هي دائرة مركزها G و نصف قطرها 1

<u>التمرين3</u>:

I/ لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0,1[$ كمايلي:

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} g(x)=0$ و $g(1)=\ln(2)-1$

حساب المشتقة: $g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{1-x-1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}<0$

x	0		1
$g'(x)$	‖	-	
$g(x)$	‖ 0	↘	$\ln(2)-1$

2. استنتاج حسب قيم x الحقيقية إشارة $g(x)$.

لدينا: $\ln(2)-1=-0.3$

ومنه: من أجل $x\in]0,1[$: $g(x)<0$

II/نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية IN كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\ln(u_n+1) \quad n\in IN \end{cases}$$

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in IN$ فإن:

$\mathbf{0<u_n\leq 1}$.

a. إثبات الخاصية من أجل $n=0$

لدينا: $0<u_0=1\leq 1$ محققة

➢ نفرض صحة الخاصية من أجل n أي: $\mathbf{0<u_n\leq 1}$

و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي:

$$\mathbf{0 < u_{n+1} \leq 1}$$

لدينا: $0 < u_n \leq 1$ ومنه: $1 < u_n + 1 \leq 2$ وعليه: $0 < \ln(u_n + 1) \leq \ln(2) < 1$

أي: $0 < u_{n+1} \leq 1$

ومنه: الخاصية محققة حسب البرهان بالتراجع

2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n + 1) - u_n$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$

بما أن:: $g(x) < 0$ فان: $u_{n+1} - u_n < 0$

وعليه: (u_n) متتالية متناقصة

التمرين4:

لدينا: $f(x) = x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و $D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

1. إثبات أن f فردية

لدينا: من أجل $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ لدينا: $-x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

و لدينا:

$$f(-x) = -x - \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -x - \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$= -x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

$$= -x - \ln(1) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= -\left(x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -f(x)$$

ومنه: الدالة f فردية

التفسير البياني: (C) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم O

2. دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$

النهايات:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ لأن: $\begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1}\left(-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\left(\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1\right)$ $\lim\limits_{x \to \infty}\left(-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = 0$

حساب المشتقة:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=1-\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=1-\frac{-2}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$$

$$=1-\frac{-2}{(x-1)(x+1)}=1+\frac{2}{(x-1)(x+1)}>0$$

جدول التغيرات:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖	↗	$+\infty$

3. تبيان أن (C) يقبل $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=0$

ومنه: $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

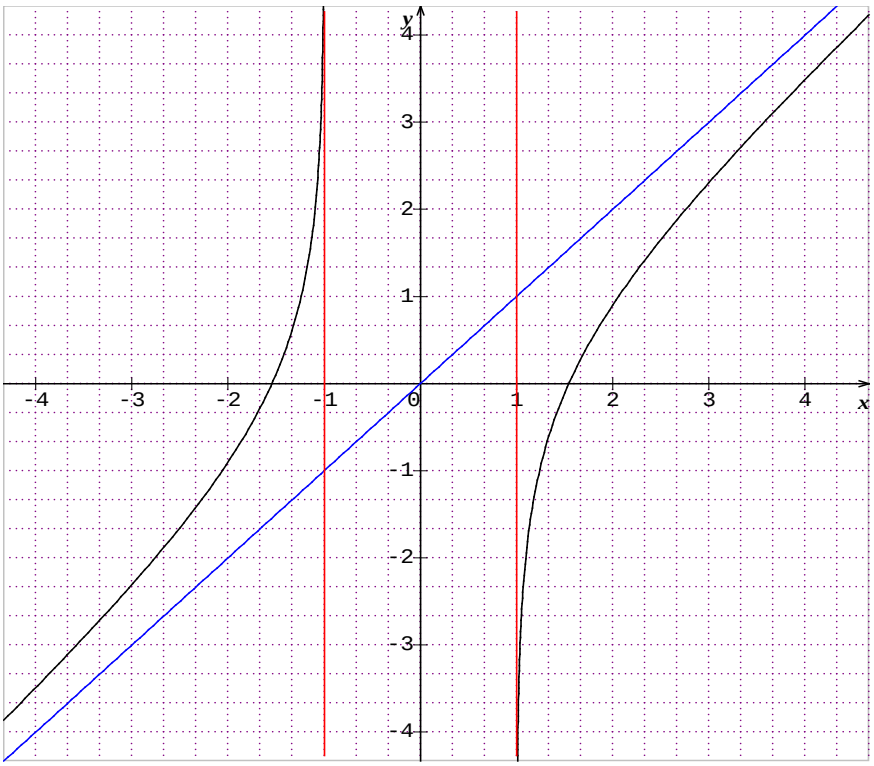
4. تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$

لدينا:

- f مستمرة على المجال $\left]\frac{3}{2},2\right[$
- f رتيبة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2},2\right[$
- $f\left(\frac{3}{2}\right)=-0.1$ و $f(2)=1.3$ أي: $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$

ومنه: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$

5. رسم المنحني (C)



إعداد الأستاذ: بن حمود الطيب