ثانوية الشيخ بوعمامة عين الذهب – تيارت    **المستوى** : 3 ع ت 1 ، 2

**التاريخ** : 2010/05/17    **المدة** : 3 ساعات

**الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات**

## عالج موضوعا واحدا على الخيار

## الموضوع الأول

### التمرين الأول : ( 3 نقط )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ولتكن النقط $A\left(1,0,1\right)$ ، $B\left(0,2,1\right)$ ، $C\left(2,1,3\right)$ من هذا المستوي

1. عين شعاع ناظمي على المستوي $\left(ABC\right)$ بمركبات صحيحة .
2. استنتج معادلة للمستوي $\left(ABC\right)$ .
3. $\left(S\right)$ سطح الكرة المعرف بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-4x=0$ .

أ – عين المركز $H$ونصف القطر $r$ لهذا السطح .

ب – أحسب المسافة بين $H$ والمستوي $\left(ABC\right)$.

ج – استنتج الوضع النسبي للمستوي $\left(ABC\right)$ والسطح $\left(S\right)$ .

4. بين أن المستقيم المعرف بـ : $\begin{cases} y=\sqrt{2} \\ x=z \end{cases}$ يمس سطح الكرة $\left(S\right)$ في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

### التمرين الثاني : ( 6 نقط )

المستوي المركب ينسب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ بمقياس رسم $1cm$

1. نعتبر النقط $C,B,A$ و $D$ ذات اللواحق $z_A=4+i, z_B=1+i, z_C=5i$ و $z_D=-3-i$

– علم هذه النقط على الشكل ، على أن يتم إكمال الشكل في سياق التمرين .

2. ليكن $f$ التحويل النقطي للمستوي المركب في نفسه ، والذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z'=\left(1+2i\right)z-2-4i$

أ – أعط صورتي النقطتين $A$ و $B$ بالتحويل $f$ .

ب – بين أن التحويل $f$ يقبل نقطة صامدة وحيدة $\Omega$ يطلب تحديد لاحقتها$\omega$.

3. أ – برهن أنه من أجل كل عدد مركب $z$ يكون : $z'-z=-2i\left(2-i-z\right)$ .

ب – استنتج من أجل كل نقطة $M$ تختلف عن $\Omega$ ، القيمة $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ واستنتج قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)$ بالراديان .

ج – ما هي طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

4. لتكن $E$ النقطة ذات اللاحقة $z_E=-1-i\sqrt{3}$

– أكتب $z_E$ على الشكل الأسي وضع النقطة $E$ على الرسم

– أعط طريقة لتعليم النقطة $E'$ صورة النقطة $E$ بالتحويل $f$ وعلمها على الشكل .

### التمرين الثالث : ( 4 نقط )

لتكن المتتالية $\left(U_n\right)$ المعرفة بحدها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}U_n+n-1$

1. أ – برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ ، $U_n \geq 0$.

ب – استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $U_n \geq n-2$.

ج – استنتج نهاية المتتالية $\left(U_n\right)$ .

2. نعرف المتتالية $\left(V_n\right)$ على $N$ كما يلي $V_n = 4U_n - 8n + 24$

أ – برهن أن $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية متناقصة وحدد أساسها وحدها الأول .

ب – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$

ج – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_n = x_n + y_n$ حيث $\left(x_n\right)$ متتالية هندسية و $\left(y_n\right)$ متتالية حسابية يطلب تحديد الأساس والحد الأول لكل منهما .

د – أستنتج المجموع $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ بدلالة $n$ .

## التمرين الرابع : ( 7 نقط )

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $R$ ب : $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x$

وليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل والمطلوب تكملة الرسم

### الجزء الأول :

1. أ – أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ مع التبرير .

ب – بين أن المستقيم $(D): y = \frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ بجوار $+\infty$، وارسم $(D)$ .

ج –أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C)$ والمستقيم $(D)$ .

د – برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - \frac{2}{3}x$

هـ – احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$.

2. أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3\left(e^x + 1\right)}$

ب – ادرس تغيرات الدالة $f$

ج – أعط جدول تغيرات الدالة $f$ .

**الجزء الثاني** :ليكن $n$ عدد طبيعي غير معدوم ، نسمي $d_n$ الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ والمستقيم $(D): y = \frac{1}{3}x$ والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x = 0$ و $x = n$ .

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $d_n = \int_0^n \ln\left(1 + e^{-x}\right)dx$

2. نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $\ln\left(1 + e^{-x}\right) \leq e^{-x}$

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $d_n \leq 1$
- هل المتتالية $\left(d_n\right)$ حيث $n \geq 1$ متقاربة ؟

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول : ( 3 نقط )

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E): y'-3y=\sin x$

1. حل ، في $R$ ، المعادلة التفاضلية التالية : $(E_0): y'-3y=0$
2. أوجد العددان الحقيقيان $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $p$ المعرفة على $R$ بـ :
$p(x)=a\cos x+b\sin x$ حل للمعادلة التفاضلية $(E)$ في $R$ .
3. بين أن $f$ حل للمعادلة التفاضلية $(E)$ على $R$ إذا وفقط اذا كانت $f-p$ حل للمعادلة التفاضلية $(E_0)$ على $R$
4. استنتج حلول المعادلة التفاضلية $(E)$ على $R$.

## التمرين الثاني : ( 5 نقط )

✓ ليكن $p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ حيث : $p(z)=z^3+4\sqrt{3}z^2+24z+24\sqrt{3}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد مركب $z$ ، $p(z)=\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+12\right)$
2. حل في مجموعة الأعداد المركبة $C$ ، المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$
3. استنتج الحلول في $C$ للمعادلة $p(z)=0$

✓ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط $C,B,A$ ذات اللواحق $z_C=-\sqrt{3}-3i, z_B=-\sqrt{3}+3i, z_A=-2\sqrt{3}$ على الترتيب .

1. أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ على الشكل الأسي .
2. ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $O$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$

أ – أعط الكتابة المركبة للدوران $R$ .

ب – بين أن صورة $A$ بالدوران $R$ هي $B$ .

ج – أحسب على الشكل الجبري لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ .

✓ لتكن $(\Gamma)$ الدائرة التي قطرها $[CD]$.

أ – تحقق أن النقطة $O$ هي مركز الدائرة $(\Gamma)$ .

ب – بين أن النقطتين $A$ ، $B$ تنتميان إلى $(\Gamma)$ واستنتج طبيعة كل من المثلثين $CAD$ و $CBD$ .

## التمرين الثالث : ( 4 نقط )

1. لتكن المتتالية $(U_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2-U_n} \end{cases}$

أ – أحسب $U_1$ ، $U_2$ و $U_3$ على شكل كسور غير قابلة للاختزال .

ب– قارن الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(U_n)$ بالحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(W_n)$ المعرفة على $N$ بـ $W_n=\dfrac{n}{n+1}$

ج – باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $U_n = W_n$ .

2. لتكن المتتالية $(V_n)$ المعرفة بحدها العام $V_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ حيث $\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري .

أ – برهن أن $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$

ب – ليكن $S_n$ المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ حيث : $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$

- أكتب $S_n$ بدلالة $n$

- أحسب نهاية $S_n$ من أجل $n$ يؤول إلى $+\infty$

**__التمرين الرابع__ : ( 8 نقط )**

أ ) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $R$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x + (1-x)e^{2x}\right]$

وليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أحسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ .
2. بين أن المستقيم $(\Delta): y = \dfrac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ بجوار $-\infty$.
3. أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C)$ والمستقيم $(\Delta)$ .
4. لتكن الدالة $g$ المعرفة على $R$ بـ : $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$ .
   - أدرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $[0.6;0.7]$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $R$ .
5. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها
6. أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$
7. أحسب $f(1), f(-1), f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;-1]$
8. أنشئ المنحني $(C)$.

ب ) لتكن $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;-1]$ بحيث : $F(-1) = \dfrac{1}{4}$

1. برر وجود الدالة $F$ .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة $F$ على المجال $]-\infty;-1]$
3. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معدلتاهما $x = 0$ و $x = 1$

**بالتوفيق والنجاح أستاذة المادة**

الرسم خاص بالتمرين الرابع – الموضوع الأول – الإسم واللقب : ....................................

القسـم : ....................................