الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — متقن قديل

امتحان بكالوريا تجريبي — دورة ماي 2011

شعبة :علوم تجريبية

اختبار في مادة :الرياضيات — المدة : ثلاث ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقط) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

1) أ - برر أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، u_n موجب تماما . ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فما هي نهايتها ؟

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، أنشئ $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$ ، ثم المستقيم Δ ذي المعادلة $y = x$ (يقتصر الرسم على المجال $[0 ; 2,2]$) . مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .ما هو تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. أ. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية متقاربة ثم عبر عن v_n بدلالة n .

ب . عبر عن u_n بدلالة v_n ثم برر التخمين الموضوع سابقا.

التمرين الثاني : (05 نقط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ (تؤخذ وحدة الرسم $1cm$)

من أجل كل نقطة M تختلف عن Ω، نذكر أن M' صورة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}) & (2) \end{cases}$$

1- ليكن $z ; z'$ و ω لواحق الأعداد $M ; M' ; \Omega$ على الترتيب ، ترجم العلاقات (1)، (2) على شكل طويلة وعمدة لأعداد مركبة . استنتج عبارة z' بدلالة z ، ω و θ.

2- حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$ (تعطى الحلول على الشكل الجبري)

3- A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $a = 2\sqrt{3} - 2i$ و $b = 2\sqrt{3} + 2i$ اكتب a و b على الشكل الأسي

- علم النقط A و B ثم بين أن المثلث OAB متساوي الساقين .

4- ليكن C النقطة ذات اللاحقة $c = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ، علم النقطتين C و D ثم بين ان لاحقة D هي $d = 4\sqrt{3} + 4i$

5- بين أن D صورة B بتحاك مركزه O يطلب تعيين نسبته . 6 - بين أن المثلث OAD قائم

التمرين الثالث: (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط التالية A(4 ; 0 ; -3) ، B(2 ; 2 ; 2) ، C(3 ;-3 ;-1) و D(0 ; 0 ; -3) .

1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور [AB] (ليكن (P) هذا المستوي) .

2) أ) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين [BC] و [DC] معرفان بالمعادلتين 2x-10y-6z-7=0 و 3x-3y+2z-5=0 على الترتيب .

– بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

التمرين الرابع: (06 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ب: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ و ليكن $\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد .

الجزء الأول:دراسة دالة مساعدة1. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=xe^x+1$ ادرس تغيرات h و بين أن $h(x)>0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

2.لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+2-e^x$

أ– عين نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ب–ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

جـ –بين ن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ نرمز بـ α و β إلى هذين الحلين حيث $\alpha>\beta$. بين أن $1,14<\alpha<1,15$

د.– استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحني $\mathcal{C}$:

1.عين نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2.أ–بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

ب–استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3.أ– بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$. ب–باستعمال حصر α عين حصراً للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

4.عين معادلة للمماس (T) للمنحني $\mathcal{C}$ عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ حيث $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب– ادرس تغير الدالة u و استنتج إشارة $u(x)$. جـ–استنتج وضعية المنحني $\mathcal{C}$ بالنسبة للمماس (T)

6.ارسم $\mathcal{C}$ و (T) .تؤخذ وحدة الطول $2cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب.

نقبل أن $-1,85<\beta<-1,84$ و $-1,19<f(\beta)<-1,18$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول : (05 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لتكن a,b,c و d أعداد حقيقية بحيث :

$(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$ وليكن المستوي (P) ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$

نعتبر النقطة I ذات الإحداثيات (x_I,y_I,z_I) والشعاع $\vec{n}$ ذو المركبات (a,b,c)

1. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل I وعمودي على (P). أوجد تمثيلا وسيطيا لهذا المستقيم .
2. نسمي H نقطة تقاطع (Δ) و (P) أ- برر وجود عدد حقيقي k بحيث : $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$

ب – عين عبارة k بدلالة a,b,c ، d ، x_I ، y_I و z_I. ج – استنتج أن $\mathrm{IH}=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3- نعتبر المستوي (Q) ذو المعادلة : $x-y+z-11=0$ مماس لسطح الكرة (S) ذات المركز $\Omega\ (1,\ -1,\ 3)$

أ – ماهو نصف قطر سطح الكرة (S)؟ ب- أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل (Ω) وعمودي على المستوي (Q)

-استنتج احداثيات نقطة تقاطع المستوي (Q) و سطح الكرة (S) .

التمرين الثاني: (06 نقط)

I. f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(1+x)-x$ و $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$

1. ادرس تغيرات كل من f و g على $[0;+\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x\geq 0$: $x-\dfrac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $\ln u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

3 . نضع $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots.+\dfrac{1}{2^n}$ و $T_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\ldots.+\dfrac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n-\dfrac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$ **4.** احسب S_n و T_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. **ب-** استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جـ– نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n\leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ "بين إذن أن: $\dfrac{5}{6}\leq\ln\ell\leq 1$. استنتج حصرا لـ ℓ .

التمرين الثالث: (04 نقط)

لتكن المعادلة التفاضلية (E) : $y'+y=2x$ بحيث y دالة ذات المتغير الحقيقي x قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقتها هي : y'

1- حل المعادلة التفاضلية : $y'+y=0$

2- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ax+b$ حلا للمعادلة التفاضلية (E).

3- أ- k عدد حقيقي ثابت ، نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ke^{-x}+2x-2$

تحقق أن f حل للمعادلة (E)

ب – أوجد k من أجل $f(0)=0$.

4- نأخذ $k=2$ احسب القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0;2]$، أعط قيمة مقربة لـ m بـ : 10^{-2}

التمرين الرابع: (05 نقط)

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (تؤخذ وحدة الرسم $4cm$)

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A=2+i$ والدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر $\sqrt{2}$

1– ارسم شكلا تعين فيه كل معطيات التمرين حتى للآخر .

2– أ – عين نقط تقاطع الدائرة (Γ) والمحور $(O;\vec{u})$

ب–نعتبر النقطتين B و C لواحقهما على الترتيب : $z_B=1$ و $z_C=3$ ، عين z_D لاحقة النقطة D الموجودة على الدائرة (Γ) والمتناظرة قطريا مع B .

3– لتكن M النقطة ذات اللاحقة $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$ - احسب العدد المركب $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$

- فسر هندسيا عمدة للعدد المركب $\frac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$ ثم استنتج أن M نقطة من الدائرة (Γ)

4– لتكن الدائرة (Γ') التي قطرها $[AB]$.المستقيم (BM) يقطع الدائرة (Γ') في نقطة N

- بين أن المستقيمين (AN) و (DM) متوازيين ثم عين لاحقة N.

5– نعتبر النقطة M' صورة M بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- عين لاحقة M'. ثم بين أن M' نقطة من الدائرة (Γ')

بالتوفيق