الوحدة :12	تحيات أستاذ الدعم: رباحي لحسن

الفوائد المركبة

الكفاءات المستهدفة

ـ يطبق مبدأ تكافؤ رؤوس الأموال بالفوائد المركبة .

الوضعية:

1 ـ وظف التاجر " محمد " في 2007/01/01 مبلغ 100000 في البنك الوطني الجزائري بمعدل فائدة مركبة 6 % سنويا لمدة 3 سنوات

ـ كم سيصبح هذا المبلغ بعد 3 سنوات ؟

ـ ما هي الفائدة التي سيتحصل عليها في نهاية المدة ؟

ـ ما هي المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة لهذا المعدل ؟

2 ـ التاجر "محمد" مدين بدين قيمته الاسمية 45000 يستحق الدفع في 2009/01/01

إذا كان معدل الفائدة المركبة 6 % احسب قيمة هذا الدين في 2004/01/01

اتفق التاجر في 2005/01/01 مع دائنه على استبدال هذا الدين بدين أخر قيمته الاسمية " أ " بنفس المعدل يستحق الدفع في 2007/10/01

ـ احسب القيمة الاسمية " أ " لهذا الدين الأخير

1- تعريف الفائدة المركبة:

نقول عن مبلغ انه موظف بفائدة مركبة إذا أضيفت الفائدة البسيطة المحصل عنها في الدورة الأولى إلى أصل المبلغ لتنتج بدورها فائدة خلال الدورة الثانية وهكذا غاية نهاية مدة التوظيف .

2 ـ القيمة المكتسبة (الجملة)

جملة رأس المال الموظف من طرف التاجر "محمد"

الزمن	مبلغ بداية السنة	الفائدة	مبلغ نهاية السنة
1	100000	100000 ×0.06 =6000	100000 + 6000 =106000
2	106000	106000×0.06=6360	106000 + 6360 =112360
3	112360	112360× 0.06=6741.6	112360 + 6741.6 = 119101.6

استنتاج القانون العام لحساب الجملة

لنرمز إلى : (a) ← أصل المبلغ

(i) ← معدل الفائدة للدورة

(n) ← عدد الدورات

(A_n) ← القيمة المكتسبة بعد المدة n

الزمن	مبلغ بداية السنة	الفائدة	مبلغ في نهاية السنة
1	a	a×i	$A_1 = a + a\times I = a(1+ i)$
2	a(1+ i)	a(1+ i)×i	$A_2 = a(1+ i)+ a(1+ i)\times i = a(1+i)^2$
.	-	-	-
.	-	-	-
.	-	-	
N	$a(1+i)^{n-1}$	$a(1+i)^{n-1}\times i$	$A_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1}\times i$ $A_n = a(1+i)^n$

وعليه فان القانون العام للجملة يكون على الشكل التالي هي :

$$\boxed{A_n = a\,(1 + i)^n}$$

القيمة $(1+i)^n$ تحسب من الجدول المالي رقم 1

الفائدة المحصل عليها

$$\boxed{I = A_n - a}$$

جملة المبلغ الموظف من طرف التاجر "محمد"

$$A_n=a(1+i)^n$$

$A_n=100000\times1.06^3$

$A_n=100000\times1.191016$

$A_n=119101.6$

الفائدة التي تحصل عليها في نهاية المدة

$$I = A_n - a$$

$I =119101.6 -100000$

$I =19101.6$

3 ـ المعدلات المتناسبة و المعدلات المتكافئة

3 ـ 1 المعدلات المتناسبة :

نقول عن معدلين تابعين لمدد مختلفة أنهما متناسبين عندما تكون نسبتهما تساوي نسبة مدتيهما الاستثمارية

الوضعية :

معدل سنوي 6%   معدل سداسي متناسب 3 %

معدل ثلاثي متناسب 1.5 %

معدل شهري متناسب 0.5 %

خلاصة : معدل سنوي i %   ↔   معدل سداسي متناسب $I_S = i/2$

معدل ثلاثي متناسب $I_t = i/4$

معدل شهري متناسب $I_m = i/12$

3 ـ 2 المعدلات المتكافئة :

نقول عن معدلين فائدة لفترتين مختلفتين أنهما متكافئان عندما يؤديان بنفس مدة التوظيف إلى نفس القيمة المكتسبة بفائدة مركبة

المعدل السداسي المكافئ :

$$\boxed{(1+i) = (1+i_s)^2}$$

المعدل الثلاثي المكافئ

$$\boxed{(1+i) = (1+i_t)^{12}}$$

المعدل الشهري المكافئ :

$$\boxed{(1+i) = (1+i_m)^{12}}$$

الوضعية :

معدل سنوي 6 %

المعدل السداسي المكافئ : $(1+ 0.06) = (1+i_s)^2$

$i_s = (1.06)^{1/2} -1 \rightarrow i_s = 0.029$

المعدل الثلاثي المكافئ : $(1+0.06) = (1+i_t)^4$

$i_t = (1.06)^{1/4}-1 \rightarrow i_t = 0.014$

المعدل الشهري المكافئ : $(1+0.06) = (1+i_m)^{12}$

$i_m =(1.06)^{1/12}-1\rightarrow i_m = 0.004$

4 ـ استعمال القانون العام للفائدة المركبة

$$A_n = a\ (1 +i)^n$$

4 ـ 1 حساب المعدل "i"

$$(1+i)^n = \frac{An}{a}$$

مثال توضيحي :

وظف مبلغ قدره 100000 لدى بنك التنمية المحلية لمدة 8 سنوات فبلغت جملة الرصيد 162417
المطلوب: ماهو معدل الفائدة المطبق من طرف البنك

الحــل :

$$(1+i)^8 = \frac{162417}{100000}$$

$$(1+i)^8 = 1.62417$$

من ج م رقم 1 نجد i = 6.25%

4 -2 حساب المدة "n"

$$(1+i)^n = \frac{A_n}{a}$$

مثال توضيحي :

شخص وظف مبلغ 10000 لدى البنك الوطني بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا وبعد مدة التوظيف بلغ رصيده 14071
المطلوب: ما هي مدة التوظيف

الحل :

$$(1.05)^n = \frac{14071}{10000}$$

$$(1.05)^n = 1.4071$$

من ج م رقم 1 نجد n = 7

4 - 3 حساب أصل المبلغ " a "

$$a = \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

مثال توضيحي :

وظف شخص مبلغ مالي " a " بتاريخ 20 / 10 / 1990 لدى البنك الوطني الجزائري بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا وبتاريخ 20 / 10 / 1993 وصله إشعار من البنك يفيد أن رصيده قد بلغ 66550
المطلوب : ما هو المبلغ الموظف في 20 / 1990/10

الحــل :

$$a = \frac{66550}{(1.1)^3}$$

$$a = \frac{66550}{1.331}$$

$$a = 50000$$

5 - حساب الجملة في حالة كون المدة " ن " ليست عددا كاملا :

عندما تكون المدة " ن " عددا غير كامل من السنوات (السنوات والأشهر معا) في هذه الحالة نستخدم طريقتين هما : 1 - طريقة الحل العقلاني
2 - طريقة الحل التجاري

5 - 1 طريقة الحل العقلاني

تقوم هذه الطريقة على تطبيق الفائدة المركبة للجزء الكامل (السنوات) والجملة المكتسبة من خلالها تطبق عليها الفائدة البسيطة .

$$N = k + \frac{b}{12}$$

حيث k = السنوات و b = عدد الأشهر

الفائدة المركبة : $A_K = a(1+i)^k$

الفائدة البسيطة : $A_K \times i \times \frac{b}{12}$

الجملة في نهاية " n "

$$A_N = A_K + A_K \times i \times \frac{b}{12}$$

$$A_N = A_K\left(1 + i \times \frac{b}{12}\right)$$

$$\boxed{A_n = a(1+i)^k (1 + \frac{i}{100} \times \frac{b}{12})}$$

مثال توضيحي :

تم إدخار مبلغ 100000 لمدة 8 سنوات و6 أشهر بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا

المطلوب : أحسب الجملة في نهاية المدة

الحل:

$$A_N = 100000(1.06)^8\left(1 + 0.06 \times \frac{6}{12}\right)$$

$$A_n = 164166.34$$

4 - 2 طريقة الحل التجاري

تقوم هذه الطريقة على تطبيق الفائدة المركبة للجزء الكامل (السنوات) وللجزء غير الكامل (الأشهر)

$$\boxed{A_n = a(1+i)^k \times (1+i)^{\frac{b}{12}}}$$

مثال توضيحي :

بأخذ نفس المثال السابق

الحل :

$$A_n = a(1+i)^k \times (1+i)^{\frac{b}{12}}$$

$$A_n = 100000 \times (1.06)^8 \times \left(1.06^{\frac{6}{12}}\right)$$

$$A_n = 100000 \times 1.593848 \times 1.02956$$

$$A_n = 164096.21$$

6 - القيمة الحالية

6 - 1 تعريف القيمة الحالية

تتمثل في المبلغ الواجب توظيفه بفائدة مركبة لمدة معينة بمعدل فائدة مركبة للحصول على رأس مال في نهاية هذه المدة

6 - 2 الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية

$$\boxed{a = A(1+i)^{-n}}$$

$(1+i)^{-n}$ يحسب من الجدول المالي رقم 2

الوضعية :

$$a = A_n(1+i)^{-n}$$

$$a = 45000 \times 1.06^{-5}$$

$$a = 45000 \times 0.747258$$

$$a = 33626.62$$

6 - 3 تقييم رأس مال يدفع في أي تاريخ كان

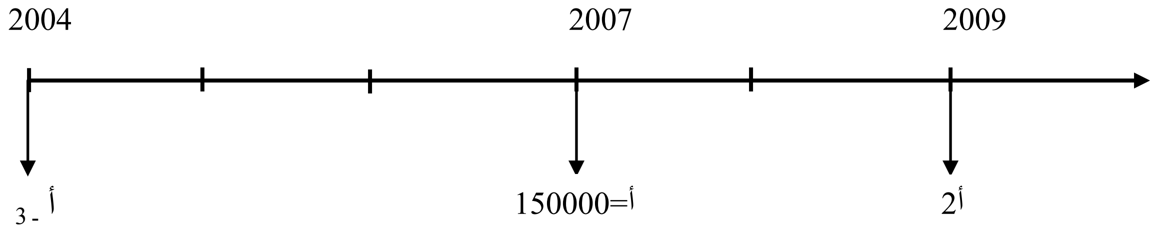
مثال توضيحي:

شخص مدين بدين قيمته الاسمية 150000 يستحق الدفع في 2007/07/01 تضمن العقد إمكانيتين لتسديد الدين :

1 - التسديد المسبق في 2004/07/01

2 - تأجيل التسديد إلى 2009/07/01

إذا كان معدل الفائدة المركبة 6 % سنويا احسب المبلغ المسدد في الحالتين



- قيمة الدين في 2004/07/01

$$a_{-3} = a(1+i)^{-3}$$

$$a_{-3} = 150000 \times 1.06^{-3}$$

$$a_{-3} = 125924.89$$

- قيمة الدين في 2009/07/01

$$a_2 = a(1+i)^2$$

$$a_2 = 150000 \times 1.06^2$$

$$a_2 = 168540$$

7 - التكافؤ بالفائدة المركبة :

7 - 1 تكافؤ رأسماليين :

ليكن لدينا راسمالين قيمتهما الاسمية " A_1 " و " A_2 " وقيمتهما الحالية " a_1 " و " a_2 " ومدة حسم كل منهما " n_1"و " n_2 " بمعدل فائدة مركبة " i "

نقول أن الراسمالين متكافئين في تاريخ معين إذا كانت $a_2 = a_1$

التكافؤ عند الزمن " صفر "

$$a_1 = A_1(1+i)^{-n1}$$

$$a_2 = A_2(1+i)^{-n2}$$

$$\boxed{A_1(1+i)^{-n_1} = A_2(1+i)^{-n_2}}$$

التكافؤ عند الزمن " b"

$$A_1(1+i)^{-n1} = A_2(1+i)^{-n2}$$

$$A_1(1+i)^{-n1}(1+i)^b = A_2(1+i)^{-n2}(1+i)^b$$

$$\boxed{A_1(1+i)^{-(n1-b)} = A_2(1+i)^{-(n2-b)}}$$

هذه المعادلة تترجم التكافؤ في الزمن " b" مهما كان هذا الزمن

مثال:

لونيس مدين بمبلغ 100000 دج يسدد بعد 6 سنوات بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا بعد مرور سنة من إبرام الاتفاق طلب من دائنه إعادة النظر في شروط العقد لتصبح المدة 4 سنوات بدل 6 سنوات

المطلوب: أحسب قيمة الدين الجديد الناجمة عن التغير

الحل :

$$100000 \times (1.08)^{-5} = A_2 (1.08)^{-3}$$

$$A_2 = 100000 \frac{(1+i)^{-5}}{(1+i)^{-3}}$$

$$A_2 = 100000 \times (1.08)^{-2}$$

$$A_2 = 85733.88$$

7 - 2 تكافؤ مجموعتين من رؤوس الأموال:

ليكن لدينا مجموعتين من رؤوس الأموال الأولى تحتوي ثلاثة رؤوس أموال قيمهم الاسمية A_1 و A_2 و A_3 مدة حسمهم N_1 و N_2 و N_3 والمجموعة الثانية تحتوي على رأسماليين قيمتهما الاسمية أ_1 و أ_2 ومدة حسمهما م_1 و م_2

التكافؤ عند الزمن " صفر "

$$\text{ج}_1(1+\text{ع})^{-\text{ن}_1} + \text{ج}_2(1+\text{ع})^{-\text{ن}_2} + \text{ج}_3(1+\text{ع})^{-\text{ن}_3} = \text{أ}_1(1+\text{ع})^{-\text{م}_1} + \text{أ}_2(1+\text{ع})^{-\text{م}_2}$$

التكافؤ عند الزمن " b"

$$\text{ج}_1(1+\text{ع})^{-(\text{ن}_1-\text{ب})} + \text{ج}_2(1+\text{ع})^{-(\text{ن}_2-\text{ب})} + \text{ج}_3(1+\text{ع})^{-(\text{ن}_3-\text{ب})} = \text{أ}_1(1+\text{ع})^{-(\text{م}_1-\text{ب})} + \text{أ}_2(1+\text{ع})^{-(\text{م}_2-\text{ب})}$$

هذه المعادلة تترجم التكافؤ في الزمن " b" مهما كان هذا الزمن

8 - تمارين للتقويم

تمرين 1 :

اقترض شخص مبلغا قدره 30000 دج يسدد بعد " ن " سنة وبفائدة مركبة 4.5% وبتاريخ التسديد سدد 50876.43

المطلوب : أحسب عدد السنوات ن = 12

تمرين 2 :

استحق مبلغ 2846.624 بتاريخ 1 / 10 / 1976 كان قد بدا استثماره في 9/30 /1967 بقيمة 2000

المطلوب : ما هو معدل الفائدة المركبة المطبق ع = 4%

تمرين 3 :

إذا علمت أن جملة قرض معين في نهاية السنة الثانية 3276.075 وفي نهاية السنة الثالثة 3423.498

المطلوب : أحسب المبلغ الأصلي للقرض ع =4% أ = 3000