ثانوية آبادي بوسواليم رأس الوادي	وزارة التربية الوطنية اختبار الفصل الثاني – مادة الرياضيات -	الشعبة : 2تر المدة : ساعتان

التمرين الأول:

لتكن الدَالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- باستعمال جدول تغيرات الدَالة f ، بين أن a ، b ، c و d حل للجملة $\begin{cases} d = 1 \quad ، \quad c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 5 \end{cases}$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$.

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

3- جد نقطة من (C) يكون عندها المماس (T') موازي لـ (T) ثم أكتب معادلة لـ (T') .

4- أ- بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب- بين أن المنحني (C) يقبل النقطة ذات الفاصلة (-1) مركز تناظر له .

5- أرسم (C) .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1- أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 , u_1 , u_2 و u_3 .

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3- أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

ب- استنتج المجموع S_n' بدلالة n حيث : $S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ع/ طيار

تصحيح اختبار الفصل الأول

حل التمرين الأول

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad ، \qquad D_f=\mathbb{R}$$

-1 تبيان أن a ، b ، c و d حل للجملة $\begin{cases} d=1 \ ، \ c=0 \\ 12a-4b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=5 \end{cases}$ ، ثم استنتاج عبارة $f(x)$.

لدينا $f(0)=d$: و $f(0)=1$ ومنه $\boxed{d=1}$........(1).

$f(-2)=a(-2)^3+b(-2)^2+(-2)c+d$ و $f(-2)=5$ ومنه $\boxed{-8a+4b-2c+d=5}$........(2).

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=c$ و $f(0)=0$ ومنه $\boxed{c=0}$........(3).

$f'(-2)=12a-4b+c$ و $f'(-2)=0$ ومنه $\boxed{12a-4b+c=0}$........(4).

من (1)،(2)،(3)،(4) نستنتج أن a ، b ، c و d حل للجملة $\begin{cases} d=1 \ ، \ c=0 \\ 12a-4b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=5 \end{cases}$

نحل الجملة نجد : $a=1$ ، $b=1$ ، $c=0$ و $d=1$ و بالتالي $f(x)=x^3+3x^2+1$

-1 كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=9x-4$

-2 إيجاد نقطة من (C) يكون عندها المماس (T') موازي لـ (T) ثم أكتب معادلة لـ (T') .

نفرض : $(T'):y=ax+b$

$(T)\parallel(T')$ إذا وفقط إذا كان $a=9$ أي $f'(x)=9$

$f'(x)=9$ تكافئ $3x^2+6x=9$ أي $x^2+2x-3=0$ ($\Delta=16$ ، $x_1=1$ أو $x_2=-3$)

معادلة (T') : $(T'):y=9x+b$ ، الثانية $(-3;1)$ تحقق المعادلة $y=9x+b$ أي $1=9(-3)+b$

ومنه $b=28$ إذن $(T'):y=9x+28$

-3 أ- نقطة الانعطاف :

-4 الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=6x+6$

المشتقة الثانية انعدمت من أجل (-1) مغيرة إشارتها ، النقطة ذات الإحداثيات $(-1;3)$ نقطة انعطاف لـ (C) .

ب- تبيان أن المنحني (C) يقبل النقطة ذات الفاصلة (-1) مركز تناظر له .

$(-1;3)$ مركز تناظر لـ $((C))$ معناه (من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(-2-x)\in\mathbb{R}$ و $f(-2-x)+f(x)=6$)

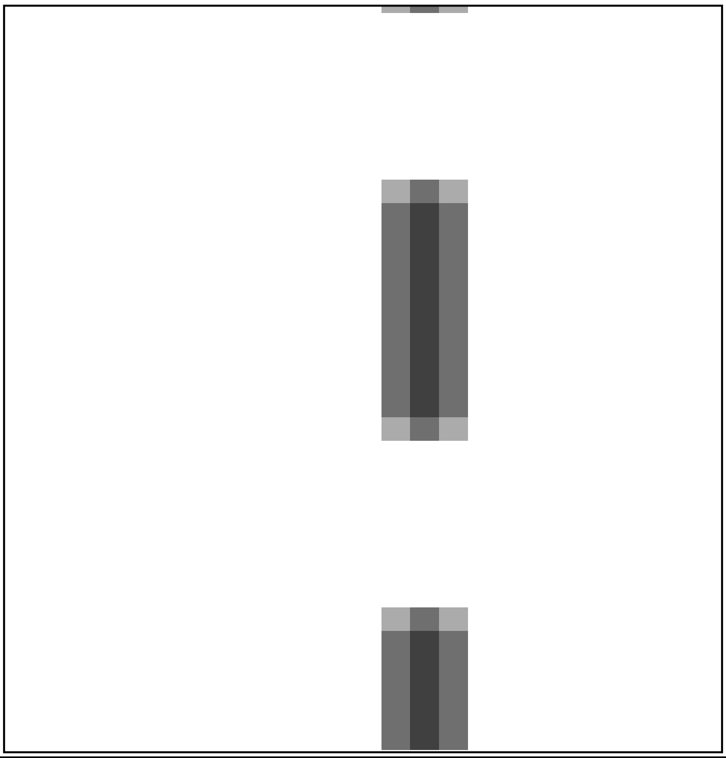
بما أن : $x\in\mathbb{R}$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}$ و منه $(-2-x)\in\mathbb{R}$ و

$$f(-2-x)+f(x)=\left[(-2-x)^3+3(-2-x)^2+1\right]+\left[x^3+3x^2+1\right]$$

$$=\left[-x^3-3x^2+5\right]+\left[x^3+3x^2+1\right]$$

$$\boxed{f(-2-x)+f(x)=6}$$

5- رسم (C) .

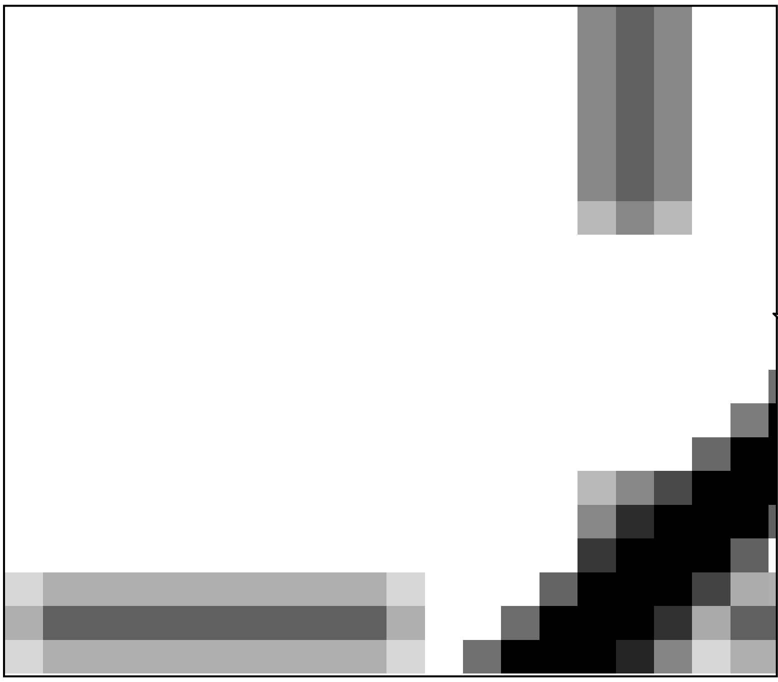


حل التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

2- أ) رسم (d) و (Δ) .

ب) تمثيل الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3 .



ملاحظة :
الرسم باستعمال البرمجية GeoGebra

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$

أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -2$.

ب) كتابة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n .

$$\boxed{v_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n} \quad \text{و} \quad u_n = v_n + 3 = \boxed{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}$$

ج) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left[\underbrace{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0} + 3\right] = 3$.

4- أ- حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$$

$$S_n = -2\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right] = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

ب- استنتاج المجموع S_n' بدلالة n :

$$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_n$$

$$S_n' = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + (v_2 + 3) + \dots\dots\dots + (v_n + 3)$$

$$S_n' = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n] + \left(\underbrace{3 + 3 + 3 + \dots + 3}_{n+1 \text{ حد}}\right)$$

$$S_n' = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 3(n+1)$$

$$\boxed{S_n' = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3n}$$