المستوى: الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا
الحصة : جبــــــــر
الموضوع : العبارات الجبرية
الكفاءات المستهدفة :

سير الدرس	الكفاءة المستهدفة
	التعرف على مختلف الصيغ لنفس العبارة الجبرية (صيغة مختصرة ، صيغة محللة ..)

6- معادلات يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أ) معادلة جداء

مبرهنة : يكون جداء عدة عوامل معدوما اذا وفقط اذا كان أحد العوامل على الأقل معدوما

$A(x) \times B(x) = 0$ تكافئ $A(x) = 0$ أو $B(x) = 0$

ملاحظة : المعادلة $A(x) \times B(x) = 0$ ، تسمى معادلة جداء

مثال : حل في R المعادلة: $(x -2)(2x + 1) - (2x \ +1)^2 = 0$ ..... (1)

ومنه $(2x +1)(x-2-2x - 1) = 0$

أي $-(2x + 1)(x + 3) = 0$

ومنه $2x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$

أي $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = -3$

اذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{-\frac{1}{2} ; -3\}$

نتيجة : n عدد طبيعي غير معدوم

$[A(x)]^n = 0$ تكافئ $A(x) = 0$

مثال : المعادلة $(2x - 4)^3 = 0$ تكافئ $2x - 4 = 0$ أي $x = 2$

معادلة حاصل قسمة

مبرهنة : المعادلة $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ تكافئ $A(x) = 0$ و $B(x) \neq 0$

ملاحظة : مثل المعادلة $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ تسمى معادلة حاصل قسمة

مثال : حل في R المعادلة : $\frac{4x^2 - 1}{2x+1} = 0$ .... (2)

المعادلة (2) تكافئ : $4x^2 - 1 = 0$ و $2x + 1 \neq 0$

(يسمح الشرط $2x + 1 \neq 0$ بتعيين المجموعة المرجعية للمعادلة)

أي $(2x + 1)(2x -1) = 0$ و $2x + 1 \neq 0$ أي $(x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{1}{2})$ و $(x \neq -\frac{1}{2})$

اذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $S = \{\frac{1}{2}\}$

7 – المتراجحات

- اشارة العبارة $ax + b$ حيث $a \neq 0$
- قاعدة : يمكن تلخيص إشارة العبارة $ax + b$ كما موضح في الجدول المقابل

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		عكس إشارة a	0	إشارة a	

- متراجحة جداء

مبرهنة : $A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان

المتراجحة $A(x) \times B(x) \geq 0$ تكافئ $A(x)$ و $B(x)$ من نفس الإشارة

مثال : حل في R المتراجحة : $x^2 - 4 \ \geq 0$ ....(1)

(1) تكافئ $(x - 2)(x + 2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
x - 2		$-$		$-$	0	+	
x + 2		$-$	0	+		+	
$(x - 2)(x + 2)$		+	0	$-$	0	+	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي : $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$

- متراجحة حاصل قسمة :

مبرهنة : $A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان

المتراجحة $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ تكافئ $A(x) \times B(x) \geq 0$ و $B(x) \neq 0$

حل متراجحات أو معادلات	مثال : حل في R المتراجحة $\frac{x-3}{2x+1} \geq 0$

تكون العبارة $\frac{x-3}{2x+1}$ معرفة عندما يكون $2x + 1 \neq 0$ أي $x \neq -\frac{1}{2}$

لدراسة إشارة حاصل القسمة هذا ، ندرس إشارة الجداء $(x-3)(2x+1)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{2x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $\left]-\infty ، -\frac{1}{2}\right[\cup \left[3، +\infty\right[$

7) العبارة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

- الشكل النموذجي للعبارة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

لدينا $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

نضع $\Delta = b^2 - 4ac$ عندئذ $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

تعريف : العدد b^2-4ac هو مميز العبارة $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ونرمز اليه بالرمز Δ (نقرأ دلتا)

- $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ هو الشكل النموذجي للعبارة $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

مثال : الشكل النموذجي للعبارة $x^2 + 4x-1$ هو $(x+2)^2 - 5$

أكتب العبارات التالية على شكلها النموذجي : $f(x) = 6x^2 - x - 1$

$p(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ ؛ $Q(x) = 3x^2 + x + 12$

* حلل إلى جداء كل من هذه العبارات إن أمكن .

* استنتج حلول كل من المعادلات : $f(x) = 0$ و $p(x) = 0$ و $Q(x) = 0$

- 7) حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$

a) نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c

لنحل المعادلة

$ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد b^2-4ac الذي يسمى مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$

نرمز له بـ Δ نكتب $\Delta=b^2-4ac$

* اذا كان $\Delta\prec 0$ فان $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\succ 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

* اذا كان $\Delta=0$ فان $x+\frac{b}{2a}=0$ أي $x=-\frac{b}{2a}$

* اذا كان $\Delta\succ 0$ فان $ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

تكافئ $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

تكافئ $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و S مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$.

العدد b^2-4ac الذي يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود ax^2+bx+c نرمز له بـ Δ

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta=0$ فان $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta=0$ فان $x=-\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فان للمعادلة حلين.

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

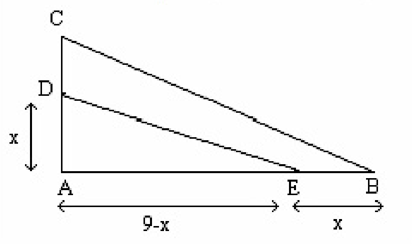
$$x^2-(1+\sqrt{3})x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \qquad 5x^2-4x+2=0$$

$$x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0 \qquad 4x^2+3x-1=0$$

تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=9$ و $AC=4$ حدد موضع نقطتين E و D تنتميان على التوالي لـ$[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD=BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$

اختيار المجهول نضع $AD=BE=x$



مساحة ADE هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}=\frac{x(9-x)}{2}$

ومنه $18-9x+x^2=0$.......

تمرين 2

ABCD مستطيل حيث : AB = 16 , AD = 20 (وحدة الطول هي cm)

K نقطة من [AD] بحيث : AK = 15

L نقطة من [AB] بحيث : AL = X حيث X عدد حقيقي موجب .

1) احسب كل من : LK^2 , KC^2 , LC^2

2) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين [KC] و [KL]

3) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL قائم في K .

تمرين 3

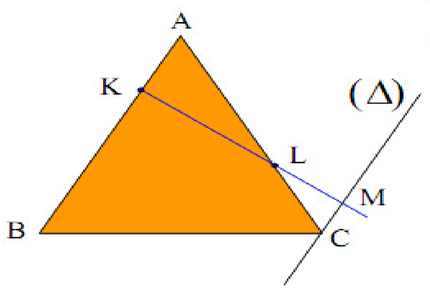
ABC مثلث حيث : AB = AC = 20 (وحدة الطول هي cm) .

K نقطة من [AB] بحيث : AK = x مع x < 10 .

L نقطة من [AC] بحيث : CL = 6 .

(Δ) المستقيم الذي يشمل C و يوازي (AB) .

المستقيم (KL) يقطع (Δ) في M .



1) بين أن : $MC=\frac{3x}{7}$

2) عين x بحيث : MC = 3

الحلول

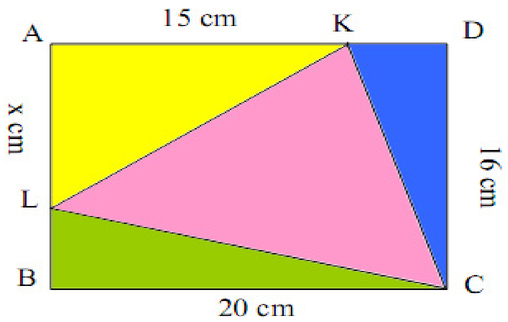
1) الحساب :

* المثلث LBC قائم في B وعليه : $LC^2 = LB^2 + BC^2$

ومنه : $LC^2 = (16 - x)^2 + (20)^2$

$= 256 - 32x + x^2 + 400$

$= 656 - 32x + x^2$



* المثلث KDC قائم في D

وعليه : $KC^2 = KD^2 + DC^2$

$= (5)^2 + (16)^2$

$= 25 + 256 = 281$

* المثلث ALK قائم في A

وعليه : $LK^2 = LA^2 + AK^2 = x^2 + (15)^2 = x^2 + 225$

2) لدينا : $KC = LK$

و منه : $281 = x^2 + 225$ إذن : $x^2 = 56$

و عليه : $x = \sqrt{56}$ و بالتالي : $x = 2\sqrt{14}$.

3) المثلث KCL قائم في K معناه :

$KC^2 + KL^2 = LC^2$

و عليه : $281 + x^2 + 225 = 656 - 32x + x^2$

و منه : $32x = 656 - 281 - 225 = 150$

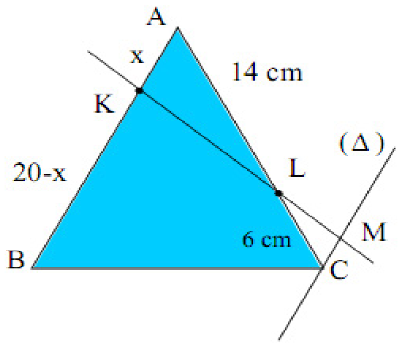
و بالتالي : $x = \frac{150}{32}$ إذن : $x = \frac{75}{16}$.

التمرين 3

1) تبيان أن : $MC=\frac{3x}{7}$

لدينا : $(AB) // (\Delta)$

وعليه حسب نظرية طاليس $\frac{MC}{AK}=\frac{LC}{LA}$ و بالتالي : $\frac{MC}{x}=\frac{6}{14}$



ومنه : $14\,MC=6\,x$ وعليه : $MC=\frac{6}{14}x$

وبالتالي : $\boxed{MC=\frac{3x}{7}}$.

2) تعيين x :

لدينا : $MC=3$ و عليه : $\frac{3x}{7}=3$

و منه : $3x=21$ إذن : $\boxed{x=7}$.