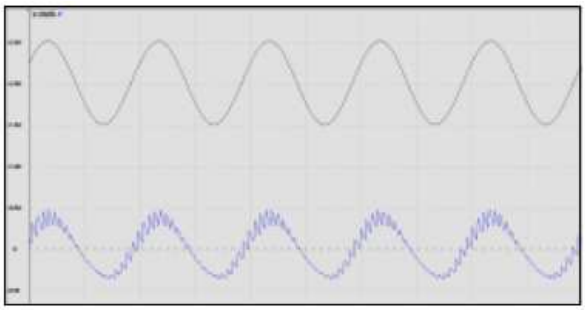
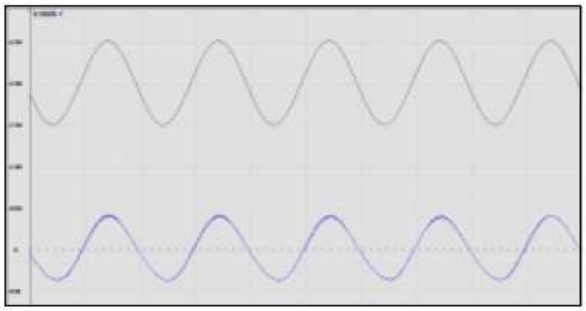




خلاصة :

ـ لإزالة تضمين توتر مضمَّن الوسع يجب :

كشف غلاف التوتر المضمَّن بواسطة صمام ثنائي و مرشح للنرددات المنخفضة ، ويكون هذا الكشف جيدا إذا تحقق الشرط : $T_p \ll \tau = RC < T_s$.

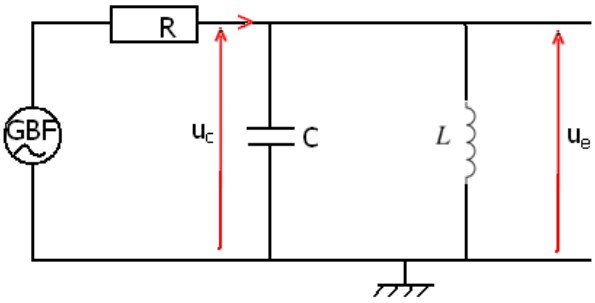
ـ حذف المركبة المستمرة للتوتر بواسطة مرشح للترددات العالية .

ب ـ أرسم تبيانة توضيحية تبين هذه المراحل .

III ـ إنجاز جهاز يستقبل بث إذاعي بتضمين الوسع .

1 ـ دراسة الدارة المتوازية LC : مرشح ممرر للمنطقة passe – bande

ننجز التركيب الكهربائي جانبه والذي يتكون من مكثف سعته C=10µF ووشيعة مركبة على التوازي مع المكثف معامل تحريضها الذاتي L=1H وموصل أومي مقاومته R=1kΩ .



يطبق مولد التردد المنخفض توترا جيبيا وسعه 1V ثابت .

نغير التردد f لمولد GBF ، وفي كل مرة نقيس بواسطة راسم التذبذب الوسع U_{ms} لتوتر الخروج $u_s(t)$.

ندون النائج في جدول ونخط المنحنى الممثل لتغيرات U_{ms} بدلالة f ، فنحصل على الشكل جانبه .

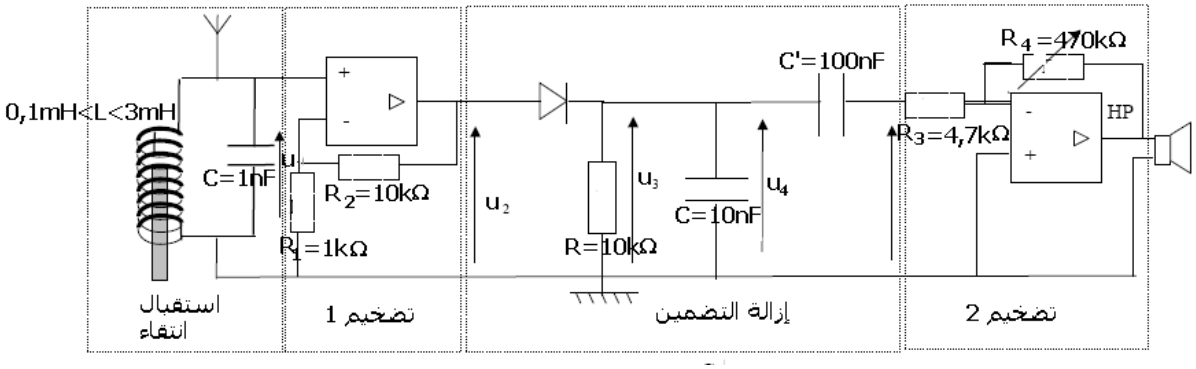
1 ـ صف منحنى الاستجابة U_{ms} بدلالة f التردد المحصَّل .

2 ـ علل لماذا تسمى الدارة المتوازية LC مرشحا ممررا للمنطقة .

3 ـ حدد مبيانيا التردد الموافق للقيمة القصوى للوسع U_{ms} ، تم قارنه مع $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. كيف يمكن انتقاء إشارة ذات تردد معين f_0 .

2 ـ مبدأ اشتغال مرشح ممرر المنطقة .

عند ربط الدارة المتوازية LC بهوائي مستقبل للموجات الكهرمغنطيسية التي ترسلها المحطات الإذاعية ، ينشأ توتر كهربائي في هذا الهوائي . ولإنتقاء إرسال واحد أو محطة واحدة يلزم التوفيق بين التردد الخاص f_0 للدارة المتوازية LC وتردد الموجة المنبعثة من المحطة ، ويتم ذلك بضبط معامل التحريض الذاتي L أو سعة المكثف C .



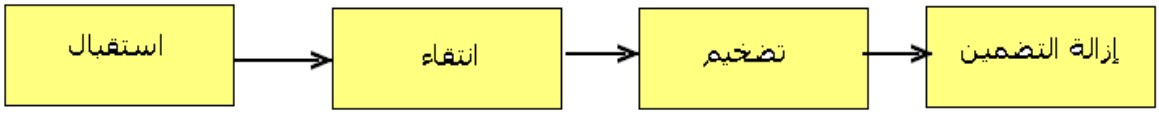
3 ـ إنجاز جهاز مستقبل راديو بسيط .

نعوض في التركيب الكهربائي السابق مولد التردد المنخفض ، بهوائي للإستقبال ونستعمل وشيعة معامل تحريضها الذاتي L قابل للضبط . نضيف تركيبا مضخما للتوتر ودارة إزالة التضمين .
ننجز التركيب الكهربائي التجريبي أعلاه ونغير معامل التحريض الذاتي L للحصول على بث إذاعي .
نعاين بواسطة راسم التذبذب التوترات u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، خلال اشتغال التركيب .
1 ـ تسمى الدارة المتوازية LC دارة التوافق circuit d'accord . ما مجال الترددات الممكن كسحه بواسطة هذه الدارة ؟
2 ـ قارن بين التوترات الملاحظة واكتب تعليقا حولها .

خلاصة .

تكون التوترات التي يلتقطها الهوائي ضعيفة جدا لذا يجب تضخيمها قبل إزالة تضمينها

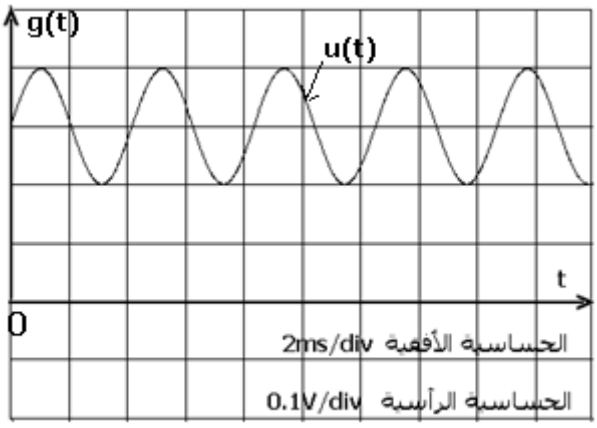
المبدأ :



يتكون المستقبل " الراديو AM " من :
ـ هوائي يلتقط موجات الراديو .
ـ ثنائي قطب LC ينتقي المحطة المرغوب فيها .
ـ مضخم التوتر المضمَّن المنتقى ؛
ـ دارة إزالة تضمين الوسع تسمح باسترجاع الإشارة المضمّنة ، وهي مكونة من دارة كاشف الغلاف ومرشح ممرر للترددات العالية .

تمارين حول تضمين الوسع

تمرين 1:



نعتبر توترا g(t) جيبي بمركبة مستمرة U_0 الممثل في الشكل جانبه :

1 ـ عين مبيانيا :

الدور T والتوتر الأقصى U_m للتوتر u(t) والتوتر للمركبة المستمرة U_0 .

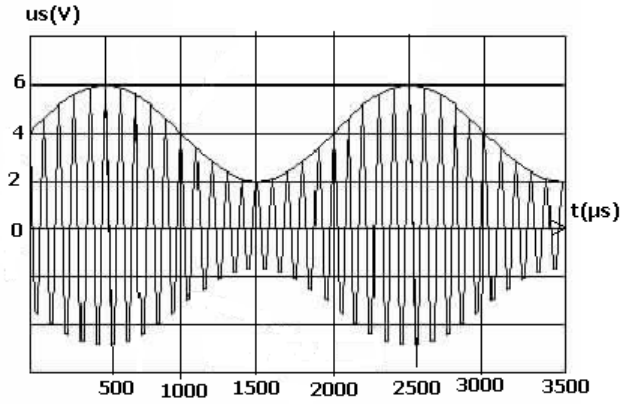
2 ـ أكتب تعبير التوتر g(t) .

تمرين 2

نعتبر توتر $u_s(t)$ مضمَّن الوسع تعبيره على الشكل التالي :

$$u_S(t) = \left(S_m \cos(2\pi f.t) + U_0\right)\cos(2.\pi.F.t)$$

يمثل الشكل جانبه تغيرات $u_S(t)$ بدلالة الزمن :



1 ـ عين مبيانيا :

أ ـ الموجة الحاملة و تردد الموجة الحاملة F و تردد الإشارة المضِّمنة f.

ب ـ القيمتين الحديتين $U_{s\,(max)}$ و $U_{s\,(min)}$.

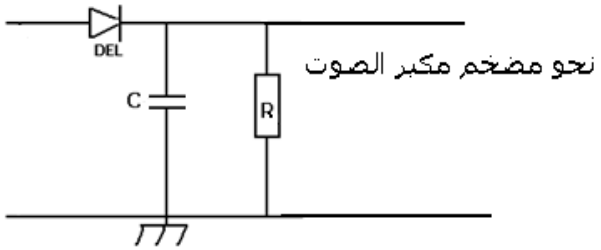
2 ـ أوجد تعبير $U_{S(max)}$ و $U_{S(min)}$ بدلالة S_m وسع توتر الإشارة المرسَلة و U_0 المركبة المستمرة للتوتر .

3 ـ أكتب تعبير m نسبة التضمين بدلالة $U_{S(max)}$ و $U_{S(min)}$. أحسب قيمة m .

4 ـ أحسب الترددات التي تظهر على رؤوس طيف الترددات للموجة المضمَّنة .

تمرين 3 إزالة التضمين

تتكون دارة إزالة التضمين لجهاز الراديو من صمام ثنائي وكاشف غلاف RC مكون من موصل أومي مقاومته R ومكثف سعته C=10nF . متوسط تردد الموجات الصوتية هو 1kHz ويلتقط مستقبل موجات الراديو موجات ترددها 164kHz .



1 ـ بين أن الجداء RC يعبر عن الزمن .

2 ـ من بين المقاومات التالية ، حدد قيمة R للحصول على موجات صوتية ذات جودة جيدة .

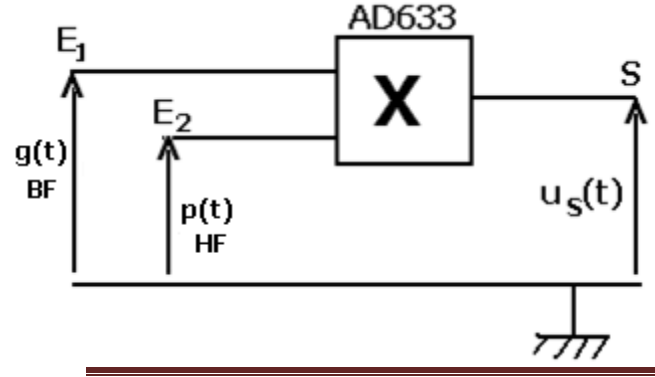
$200k\Omega, 20k\Omega, 1k\Omega, 100\Omega$

تمرين 4

في المختبر تم إنجاز تركيب التضمين الممثل جانبه .

الهدف منه ملاحظة التوترين المضمِّن والحامل .

لمعاينة هاذين التوترين تم استعمال حاسوب فحصلنا على المنحنيات التالية

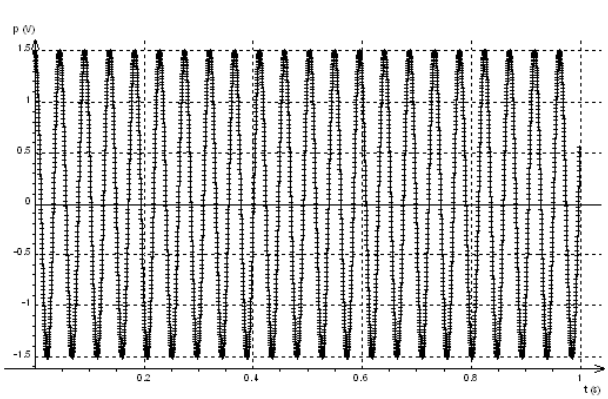


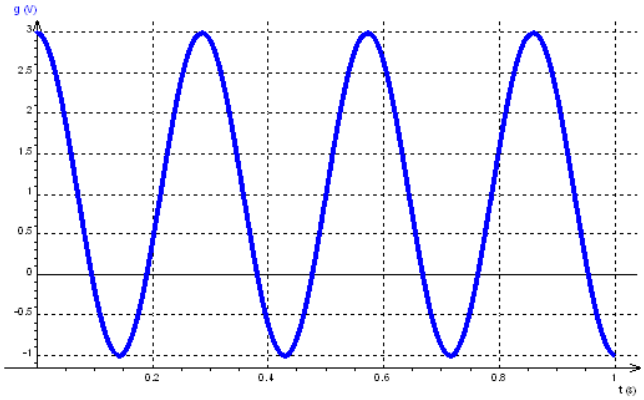
1 ـ أعط اسم المركبة المستعملة في هذا التركيب .

2 ـ حدد على التبيانة المدخلين X و Y لمعاينة التوترين المضمِّن والحامل .

3 ـ حدد مبيانيا دور وتردد التوترين واستنتج طبيعتهما . علل جوابك .

4 ـ ما قيمة المركبة المستمرة للتوتر U_0 ؟





تمرين 5

ننجز دارة التضمين باستعمال توترين جيبيين ودارة كهربائية منجزة لجداءهما .

1 ـ نعطي تعبير كل توتر جيبي بدلالة الزمن $u(t) = 0,5.\cos(2\pi.100t)$ و $p(t) = 4.\cos(2\pi.2000t)$

1 ـ 1 عين طبيعة كل توتر (الحامل والمضمِّن)

1 ـ 2 نضيف للتوتر المضمِّن مركبة مستمرة للتوتر U_0=1,5V ، أكتب تعبير التوتر الناتج s(t) عن هذه الإضافة .

2 ـ تعطي الدارة المنجزة للجداء عند مخرجها توترا $u_s(t)$ يتناسب مع جداء التوترين الحامل و s(t) . أوجد التعبير الحرفي للجداء $u_s(t)$ علما أن معامل التناسب هو k .

3 ـ استنتج من التعبير السابق الدوال الجيبية المكونة ل $u_s(t)$ ثم عين ترددها .

4 ـ مثل طيف الترددات موضحا عرض المنطقة .

5 ـ مثل على نفس المبيان تغيرات التوتر الحامل والتوتر المضمِّن بدلالة الزمن . لنعتبر 10ms أقصى مدة على محور الزمن .

6 ـ مثل على مبيان آخر شكل منحنى كل من s(t) و $u_s(t)$. ما الفائدة من تمثيل المنحنيين على نفس المبيان ؟

7 ـ ما شكل منحنى $u_s(t)$ في غياب المركبة المستمرة للتوتر U_0 ؟ ما اسم الظاهرة ؟ ما المشكل الذي يحدث عند الاستقبال ؟

8 ـ يتكون جهاز الاستقبال من دارة سدادة LC وكاشف للغلاف .

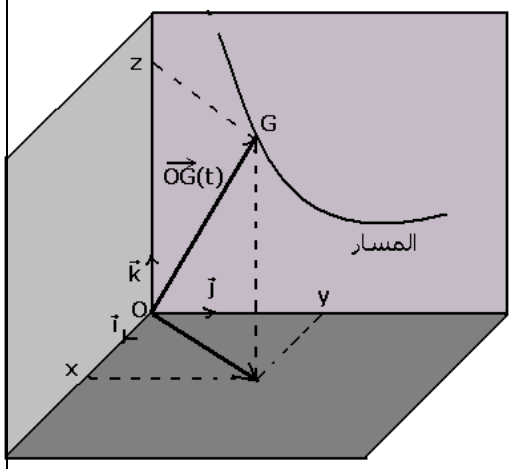
أ ـ مثل الدارة السدادة ثم احسب قيمة معامل التحريض للوشيعة ، نعطي F^{-6} .

ب ـ مثل دارة إزالة التضمين (دارة كاشف الغلاف) ثم اقترح قيمة تقريبية لسعة المكثف . نأخذ R=1KΩ .

قوانين نيوتن

I ـ متجهة السرعة اللحظية ـ متجهة التسارع اللحظي .

1 ـ تذكير .



* الحركة : متى يكون جسم صلب في حركة ؟

حركة الجسم الصلب هي **نسبية** أي تتعلق **بالجسم المرجعي** الذي اختير لدراسة هذه الحركة .

لدراسة حركة جسم ما يجب أن نختار جسم مرجعي ونعتبر **معلم للفضاء ومعلم الزمن** مرتبطين **بالجسم المرجعي .**

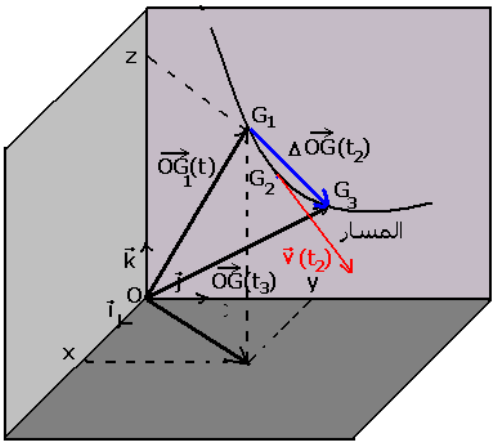
في جسم مرجعي ، يكون جسم صلب في حركة عندما يتغير موضع نقطه خلال الزمن

* نقتصر في دراسة حركة جسم صلب في جسم مرجعي ما على حركة **مركز قصوره G** والتي تمكننا من معرفة **حركته الإجمالية** .

* نمعلم نقطة متحركة من جسم صلب بواسطة **متجهة الموضع** .

مثلا حركة مركز قصور الجسم (S)نمعلمها بالمتجهة : $\overrightarrow{OG}$ بحيث أن إحداثياتها في المعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي :

$$\overrightarrow{OG}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$



مجموع المواضع المتتالية التي تشغلها النقطة G خلال الزمن تكوّن **مسار** هذه النقطة .

2 ـ متجهة السرعة اللحظية

أ ـ تعريف :

نعتبر $G(t_1)$ موضع مركز قصور المتحرك عند اللحظة t_1 و $G(t_2)$موضع مركز القصور للمتحرك عند اللحظة t_2 و $G(t_3)$ موضع مركز القصور عند اللحظة $t_3=t_1+\Delta t$ ، نعرف متجهة السرعة عند اللحظة t_2 بالعلاقة التالية :

$$\vec{v}(t_2)=\frac{\overrightarrow{G(t_3)G(t_1)}}{t_3-t_1}=\frac{\overrightarrow{G(t_3)G(t_1)}}{\Delta t}$$

نطبق علاقة شال في الرياضيات :

$$\overrightarrow{G(t_1)G(t_3)}=\overrightarrow{G(t_1)O}+\overrightarrow{OG(t_3)}=\overrightarrow{OG(t_3)}-\overrightarrow{OG(t_1)}=\overrightarrow{\Delta OG(t_2)}$$

$$\vec{v}(t_2)=\frac{\overrightarrow{\Delta OG(t_2)}}{\Delta t}$$

يمكن أن نعمم هذه النتيجة على الشكل التالي :

$$\vec{v}(t)=\frac{\overrightarrow{\Delta OG(t)}}{\Delta t}$$

هذه الطريقة تسمى بالطريقة التأطيرية تستعمل في حالة أن اللحظة t_i تكون مؤطرة من طرف لحظتين t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين .

رياضيا نبرهن على أن $\frac{\overrightarrow{\Delta OG(t)}}{\Delta t}$ تؤول إلى المشتقة الأولى $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ عندما تؤول $\Delta t\to 0$ أي أن :

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OG}}{\Delta t}$$

مميزات متجهة السرعة :

تكون متجهة السرعة في نقطة معينة مماسة لمسار هذه النقطة وموجهة في منحى حركتها
في حالة حركة مستقيمية يكون اتجاه متجهة السرعة متطابق مع مسار هذه النقطة
وحدة السرعة في النظام العالمي للوحدات هي m/s

ملحوظة : تتعلق متجهة السرعة بالجسم المرجعي الذي تتم فيه الدراسة .

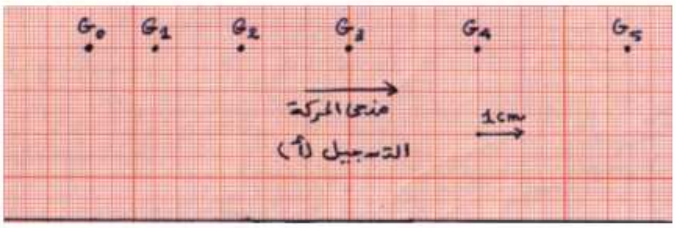
ب ـ إحداثيات متجهة السرعة في معلم ديكارتي

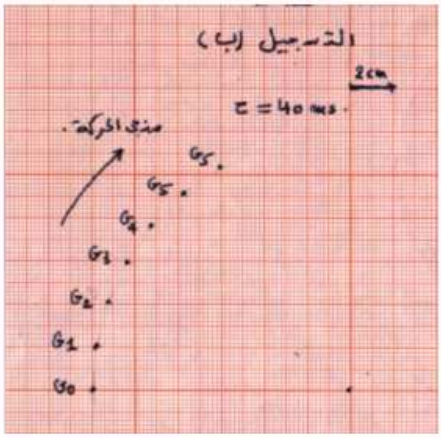
في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (معلم ديكارتي) إحداثيات السرعة اللحظية هي :

$$\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{dx_G}{dt}\vec{i} + \frac{dy_G}{dt}\vec{j} + \frac{dz_G}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{x}_G\vec{i} + \dot{y}_G\vec{j} + \dot{z}_G\vec{k}$$

تمرين تجريبي :

لدراسة حركة مركز قصور حامل ذاتي على منضدة هوائية نقوم بتجربتين :
التجربة الأولى نميل المنضدة بزاوية $\alpha = 20°$ بالنسبة للمستوى الأفقي . نطلق الحامل الذاتي من أعلى المنضدة بدون سرعة بدئية ونسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية ومتساوية $\tau = 40ms$ فنحصل على التسجيل (أ) .
التجربة الثانية : نعيد المنضدة إلى وضعها الأفقي ونربط الحامل الذاتي بخيط غير قابل الامتداد حيث أحد طرفيه مثبت بحامل ثابت والطرف الآخر مرتبط بالحامل الذاتي ونجره بطريقة . نسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية ومتساوية $\tau = 40ms$. فنحصل على التسجيل (ب) .

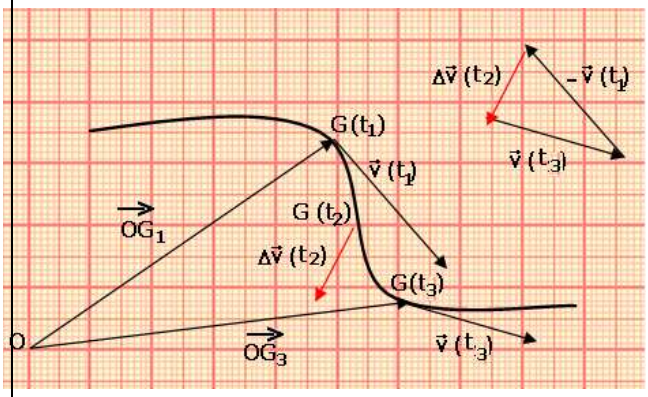




استثمار :

1 ـ أحسب بالنسبة لكل تسجيل v_2 و v_4 سرعتا G مركز قصور الحامل الذاتي على التوالي في الموضعين G_2 و G_4 .

2 ـ مثل على كل تسجيل المتجهتين $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_4$ باستعمال سلم ملائم . مثل في G_3 من كل تسجيل المتجهة $(\vec{v}_4 - \vec{v}_2)$.



3 ـ متجهة التسارع اللحظي .

أ ـ تعريف

لتكن $\vec{v}(t_1)$ متجهة السرعة في اللحظة t_1 و $\vec{v}(t_3)$ في اللحظة $t_3 = t_1 + \Delta t$ نعرف متجهة التسارع $\vec{a}_G(t_2)$ بالعلاقة التالية :

$$\vec{a}_G(t_2) = \frac{\vec{v}(t_3) - \vec{v}(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{\Delta\vec{v}(t_2)}{\Delta t}$$

بصفة عامة تكتب متجهة التسارع في لحظة t هي : $\vec{a}(t)=\dfrac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}$

نستعمل هذه العلاقة في حالة أن اللحظة t_i مؤطرة بلحظتين t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين .

عندما تتناهى Δt نحو الصفر ، يتناهى المقدار $\dfrac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t}$ نحو متجهة التسارع $\vec{a}_G(t)$ بحيث أن :

$$\vec{a}_G(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t}\right)=\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

وحدة التسارع في النظام العالمي للوحدات هي m/s^2 .

ملحوظة : تتعلق متجهة التسارع بالجسم المرجعي الذي تتم فيه الدراسة .

تطبيق :

3 ـ احسب بالنسبة للدراسة التجريبية السابقة المتجهة $\vec{a}_3$. ومثلها باستعمال سلم مناسب .

ب ـ إحداثيات متجهة التسارع

* إحداثيات متجهة التسارع في معلم ديكارتي $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{a}_G(t)=\frac{d\vec{v}_G}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}=\frac{d^2x_G}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y_G}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z_G}{dt^2}\vec{k}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\ \vec{j}+\ddot{z}\ \vec{k}$$

حالات خاصة :

إذا كانت حركة G تتم على مستوى $(O,\vec{i},\vec{j})$ في معلم ديكارتي مرتبط بجسم مرجعي $\mathcal{R}$ تصبح العلاقات كالتالي :

$$\overrightarrow{OG}=x\vec{i}+y\vec{j},\vec{v}_G=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j},\vec{a}_G=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}$$
$$v_G=\sqrt{v_x^2+v_y^2},a_G=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

إذا كانت حركة G حركة مستقيمية تتم وفق المحور $(O,\vec{i})$ فإن العلاقات هي كالتالي :

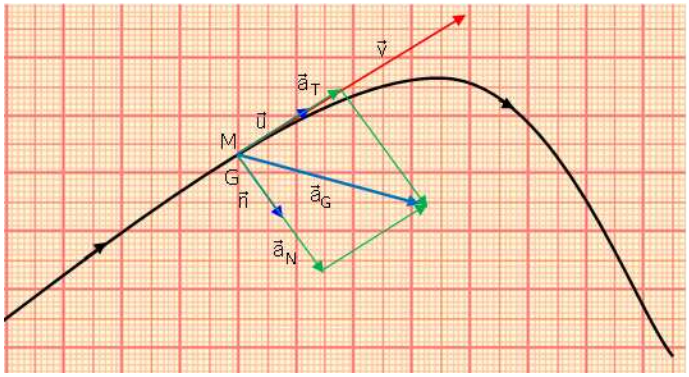
$$\overrightarrow{OG}=x\vec{i},\vec{v}_G=\dot{x}\vec{i},\vec{a}_G=\ddot{x}\vec{i}$$

*** إحداثيتا التسارع في أساس فرينيي .**

تعريف بأساس فرينيي :

أساس فيرني هو أساس للإسقاط غير مرتبط بالمرجع .

معلم فريني $(M,\vec{u},\vec{n})$ معلم متعامد وممنظم ينطبق أصله مع موضع النقطة المتحركة ، حيث متجهته الواحدية $\vec{u}$ مماسة للمسار وموجهة في منحى الحركة ، ومتجهته $\vec{n}$ متعامدة مع $\vec{u}$ وموجهة داخل انحناء المسار .



نعبر عن متجهة التسارع $\vec{a}_G$ في أساس فريني ، بالنسبة لحركة مستوية كالتالي :

$\vec{a}_G=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$ بحيث أن :

$\vec{a}_T$ متجهة التسارع المماسي بحيث أن $a_T=\dfrac{dv_G}{dt}$

$\vec{a}_N$ متجهة التسارع المنظمي بحيث أن $a_N=\dfrac{v^2}{\rho}$ هو شعاع انحناء المسار في الموضع M .

ملحوظة : من خلال الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{a}$ و $\vec{v}$ يمكن لنا تحديد طبيعة الحركة :

$\vec{a}.\vec{v}=a.v.\cos(\vec{a},\vec{v})$

تتعلق إشارة الجداء $\vec{a}.\vec{v}$ بالزاوية $\alpha=(\vec{a},\vec{v})$

$\vec{a}.\vec{v}<0$ تكون الحركة متباطئة

$\vec{a}.\vec{v}>0$ تكون الحركة متسارعة

$\vec{a}.\vec{v}=0$ تكون الحركة مستقيمية منتظمة .

II ـ قوانين نيوتن

1 ـ القوة الداخلية ـ القوة الخارجية .

للقيام بدراسة ميكانيكية يجب تحديد المجموعة المدروسة وهي تتكون من جسم واحد أو أكثر
يسمح بتصنيف القوى المقرونة بالتأثيرات الميكانيكية بين مكوناتها إلى قوى داخلية وقوى خارجية
القوة الخارجية هي كل التأثيرات الميكانيكية المطبقة على المجموعة من أجسام لا
القوى الداخلية هي التأثيرات الميكانيكية المطبقة من طرف الأجسام المنتمية للمجموعة

ملحوظة : إذا كان مجموع القوى الخارجية منعدما $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ نقول أن هذه المجموعة شبه معزولة ميكانيكيا .

2 ـ القانون الأول لنيوتن أو مبدأ القصور

في مرجع غاليلي ، إذا كان مجموع القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب يساوي متجهة منعدمة $\left(\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}\right)$، فإن متجهة السرعة $\vec{v}_G$ لمركز القصور G للجسم الصلب تكون ثابتة . وفي المقابل ، إذا كانت متجهة السرعة لمركز القصور G للجسم الصلب ثابتة ، فإن مجموع القوى الخارجية المطبقة على الجسم مجموع منعدم .

ملحوظة :

يمكّن مركز القصور من التمييز بين مراجع غاليلية ومراجع غير غاليلية : المراجع الغاليلية هي مراجع يتحقق فيها مبدأ القصور .
المرجع المركزي الشمسي (مرجع كوبرنيك) مركزه الشمس والمحاور الثلاث موجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة . أفضل مرجع غاليلي .
المرجع المركزي الأرضي : مركزه الأرض ملائم لدراسة حركات الأجسام التي تتحرك حول الأرض (الطائرات والأقمار الاصطناعية ..) ليس بمرجع غاليلي بالمعنى الدقيق .
المرجع الأرضي : كل جسم صلب مرتبط بسطح الأرض يمكن اعتباره مرجعا أرضيا . مثال : المختبر .
ويستعمل لدراسة جميع الأجسام التي تتحرك على سطح الأرض أو على ارتفاع ضئيل منه بمرجعا غاليليا بالمعنى الدقيق .
بالنسبة للحراكات القصيرة المدة يمكن اعتبار هذين المرجعين غاليليين .

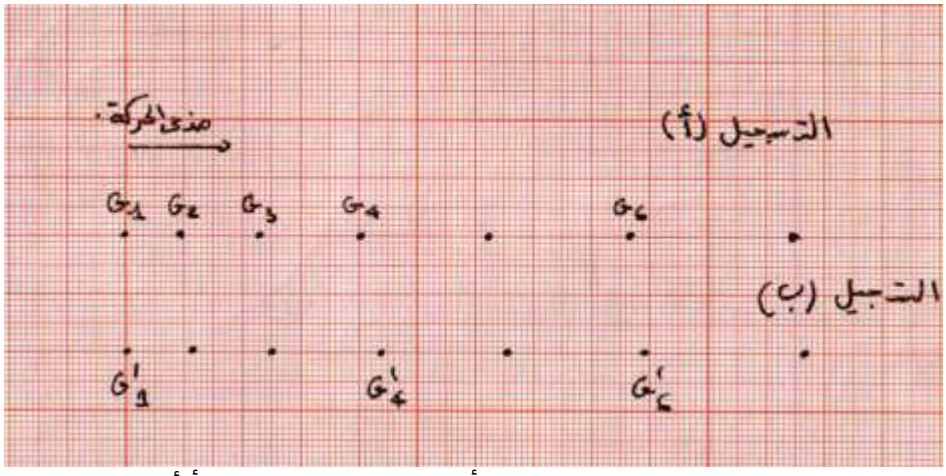
3 ـ القانون الثاني لنيوتن (القانون الأساسي للتحريك)

3 ـ 1 العلاقة بين $\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$ و $\sum \vec{F}_{ext}$

النشاط التجريبي 2

التحقق التجريبي من العلاقة $\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$

نضبط المنضدة أفقيا ، ونضع الحامل الذاتي فوقها ، ثم نربطه بجهاز يطبق قوة ثابتة قابلة للضبط بواسطة خيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . نحرك الحامل الذاتي في اتجاه محور أنبوب الجهاز حتى يصير الخيط موازيا لسطح المنضدة ، ونبقيه في حالة سكون . نشغل الجهاز فينزلق الحامل الذاتي فوق المنضدة بفعل القوة $\vec{F}$ التي يطبقها عليه الخيط $\left(F = 0,27N\right)$ ، وفي نفس الوقت نسجل المواضع التي يحتلها G مركز قصور الحامل الذاتي في مدد متتالية ومتساوية $\tau = 80ms$ فنحصل على التسجيل (أ) أنظر التسجيل أسفله .
نعيد نفس التجربة مع الاحتفاظ بنفس الشدة F لكن بوجود نقص في صبيب الهواء المنبعث من معصفة souflerie الحامل الذاتي . نحصل على التسجيل (ب)



1 ـ أجرد القوى المطبقة على الحامل الذاتي أثناء حركته في التجربة ألأولى .

2 ـ أثبت أن $\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$ مجموع القوى الخارجية المطبقة على الحامل الذاتي أثناء حركته يكافئ القوة $\vec{F}$ خلال التجربة ألأولى .

3 ـ أوجد باستغلال التسجيل قيمة Δv_G تغير سرعة G في الحالات التالية :

أ ـ بين G_1 و G_3 ب ـ بين G_2 و G_4 ج ـ بين G_2 و G_5 د ـ بين G_2 و G_6 . ماذا تلاحظ ؟

4 ـ مثل تغيرات Δv_G بدلالة Δt المدة الزمنية الموافقة .

5

القسمة $\frac{F}{m}$ ، m هي كتلة الحامل الذاتي : m=450g . تحقق من العلاقة $\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$.

6 ـ نعتبر أن قوة الاحتكاك $\vec{f}$ موازية لمسار G ومنحاها عكس منحى G . أحسب f شدة هذه القوة .

7 ـ إذا علمت أن القانون الثاني لنيوتن تجسده العلاقة $\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$ ، اقترح نص هذا القانون ، مبرزا الفائدة منه .

3 ـ 2 نص القانون الثاني لنيوتن .

عندما تتناهى Δt نحو الصفر يتناهى خارج القسمة $\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$ نحو متجهة التسارع $\vec{a}_G$ ، فتصبح العلاقة $\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$ بمتابة قانون لحظي ، وهو القانون الثاني لنيوتن $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$

نص قانون :

في مرجع غاليلي ، يساوي مجموع القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب جداء كتلة هذا الجسم ومتجهة التسارع لمركز قصوره G :

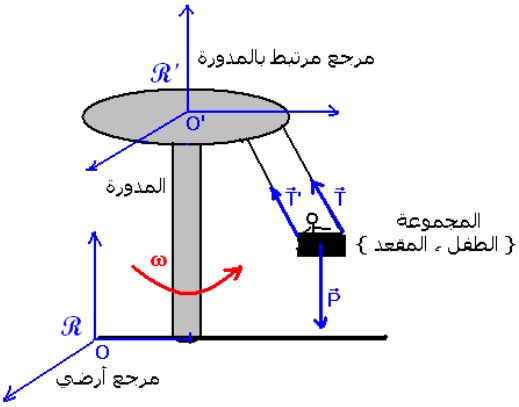
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

ملحوظة : لا يطبق القانون الثاني لنيوتن إلا في المراجع الغاليلية .

تطبيق حول تطبيق القانون الثاني لنيوتن في المراجع الغاليلية :

تنجز مدورة ألعاب حركة دوران منتظم ، حول محور ثابت ، في مرجع أرضي . أخذ الطفل أحمد مقعده في هذه المدورة . نعتبر { الطفل ، المقعد } المجموعة المدروسة ونجسم هذه المجموعة بمركز قصورها G ، حيث كتلتها M .

1 ـ اجرد القوى المطبقة على المجموعة خلال حركة دورانها . ومثلها بدون سلم في مركز قصور المجموعة .



ـ وزن المجموعة $\vec{P}$

ـ تأثير الحبل على المجموعة $\vec{F}$

2 ـ نعتبر الجسم المرجعي $\mathcal{R}'$ مرتبط بالمدورة والجسم المرجعي الأرضي $\mathcal{R}$.

2 ـ 1 حدد الحالة الميكانيكية للمجموعة في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$. واستنتج تسارعها في المرجع $\mathcal{R}'$.

في الجسم المرجعي $\mathcal{R}'$ المرتبط بالمدورة المجموعة في حالة سكون

في الجسم المرجعي $\mathcal{R}$ في حركة دوران منتظم .

ـ تسارع المجموعة في $\mathcal{R}'$ منعدم $\vec{a}_G = \vec{0}$

2 ـ 2 طبق القانون الثاني لنيوتن في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$. ماذا تستنتج ؟

نطبق القانون الثاني لنيوتن في $\mathcal{R}$: $\vec{P} + \vec{F} = M.\vec{a}_G$

نطبق القانون الثاني لنيوتن في $\mathcal{R}'$ بما أن $\vec{a}_G = \vec{0}$ فإن $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ لكن حسب تمثيل القوى يلاحظ أن $\sum \vec{F}_{ext} \neq \vec{0}$

4 ـ القانون الثالث لنيوتن

نص القانون : مبدأ التأثيرات المتبادلة .

نعتبر جسمين A و B في تأثير بيني ، لتكن $\vec{F}_{A/B}$ القوة التي يطبقها A على B و $\vec{F}_{B/A}$ القوة التي يطبقها B على A .

سواء كان الجسمان في حركة أو في سكون فإن القوتين $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ تحققان المتساوية :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

يطبق هذا القانون بالنسبة لقوى التماس وكذلك بالنسبة لقوى عن بعد .

III ـ تطبيق : حركة جسم صلب على مستوى أفقي وعلى مستوى مائل .

1 ـ نعتبر جسما صلبا (S) كتلته M=200g ، موضوعا فوق مستوى أفقي بحيث يتم التماس بينهما بدون احتكاك . نطبق قوة أفقية ثابتة $\vec{F}$ شدتها F=0.5N و تسمح بتحريكه على المستوى الأفقي . خط تأثير القوة $\vec{F}$ موازي للمستوى الأفقي .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم الصلب (S) أثناء حركة مركز قصوره G ، بين أن طبيعة حركة مركز قصوره حركة مستقيمية متغيرة بانتظام . أحسب قيمة التسارع a_G لمركز قصوره .

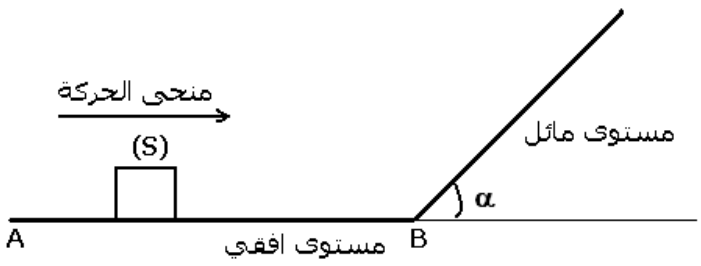
الجواب :

لتطبيق القانون الثاني لنيوتن نحدد المجموعة المدروسة : (S) . ونختار مرجعا غاليليا وهو المرجع الأرضي .

نقوم بجرد القوى المطبقة على المجموعة المدروسة : (S)

$\vec{P}$ وزن الجسم (S)

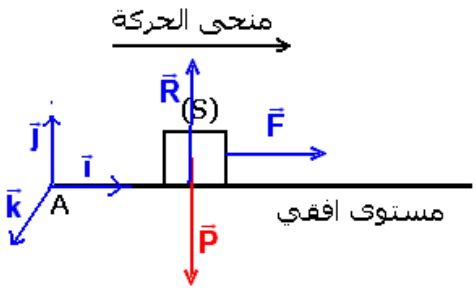
$\vec{F}$ القوة الأفقية الثابتة .



$\vec{R}$ تأثير السطح على (S) . في غياب الاحتكاك بين الجسم والسطح تكون المتجهة $\vec{R}$ عمودية على السطح الأفقي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، القانون الأساسي للتحريك

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}=m.\vec{a}_G$$



إسقاط العلاقة المتجهية على المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

على Ox لدينا : $P_x+R_x+F_x=m.a_1 \Rightarrow F=m.a_1$ (1)

على Oy لدينا $P_y+F_y+R_y=\vec{0}$ غياب الحركة على المحور Oy أي أن $R-P=0 \Rightarrow R=P=mg$

حركة مركز قصور الجسم (S) حركة مستقيمية لأن مسار مركز قصور الجسم مستقيمي .

من خلال العلاقة (1) يتبين أن التسارع a لمركز قصور الجسم ثابت حسب التعبير التالي : $a=\frac{F}{m}$

وبالتالي فحركة مركز قصور الجسم (S) حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

حساب التسارع a : $a_1=2,5m/s^2$

2 ـ في نقطة B ، تبعد عن النقطة A موضع انطلاقه بدون سرعة بدئية بمسافة ℓ=30cm ، يصعد الجسم (S) مستوى مائلا بالنسبة للمستوى الأفقي بزاوية $\alpha=45°$ حيث تبقى نفس القوة $\vec{F}$ مطبقة عليه ، خط تأثيرها موازي للمستوى المائل . نعتبر أن التماس بين المستوى المائل والجسم (S) يتم بالاحتكاك وأن معامل الاحتكاك في هذه الحالة هو k=0,1 .

ما هي طبيعة حركة مركز قصور الجسم (S) خلال حركته على المستوى المائل ؟

أحسب المسافة الدنوية التي يمكن أن يقطعها الجسم قبل توقفه .

الجواب :

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) في الجزء الثاني من مساره وهو المستوى المائل .

نختار نفس المرجع السابق وهو المرجع الأرضي والذي نعتبر ه مرجعا غاليليا ونربطه بمعلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

جرد القوى المطبقة على (S) :

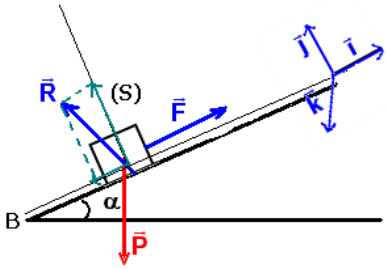
$\vec{P}$ وزن الجسم (S)

$\vec{F}$ القوة الثابتة حيث اتجاهها موازي للمستوى المائل .

$\vec{R}$ تأثير السطح على (S) . وجود الاحتكاك بين الجسم والسطح تكون المتجهة $\vec{R}$ مائلة بالنسبة للخط المنظمي على المستوى المائل بزاوية φ تسمى بزاوية الاحتكاك ومنحاها عكس منحى حركة الجسم (S) . نعرف معامل الاحتكاك بالعلاقة التالية : $k=\tan\varphi=\left|\frac{R_T}{R_N}\right|$ بحيث أن $\vec{R}_T$ المركبة المماسية للمتجهة $\vec{R}$ وهي التي تقاوم حركة الجسم تسمى بقوة الاحتكاك ونرمز لها ب $\vec{f}$ و $\vec{R}_N$ المركبة المنظمية على المستوى المائل للمتجهة $\vec{R}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، القانون الأساسي للتحريك

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{R}=m.\vec{a}_G$$



إسقاط العلاقة المتجهية على المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

على Ox لدينا : $P_x+R_x+F_x=m.a_2 \Rightarrow -mg\sin\alpha-R_T+F=m.a_2$ (1)

على Oy لدينا $P_y+F_y+R_y=\vec{0}$ غياب الحركة على المحور Oy أي أن $R_N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow R_N=mg\cos\alpha$

لدينا $k=\frac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T=k.R_N=k.mg\cos\alpha$ من العلاقة (1) نستنتج أن

$$-mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha + F = m.a_2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{F}{m} - \left(g\sin\alpha + kg\cos\alpha\right)\right)$$

$$a_2 = a_1 - \left(g\sin\alpha + kg\cos\alpha\right)$$

يلاحظ من خلال التعبير أن a_2 ثابتة وأصغر من a_1 نظرا لوجود الاحتكاكات وكذلك المستوى المائل .
إذن فحركة مركز قصور الجسم (S) في هذا الجزء هي حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .
قيمة التسارع a_2 هي : $a_2 = -5,1m/s^2$
نحسب المسافة الدنوية التي يجب أن يقطعها الجسم قبل توقفه :
نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين النقطة B التي سيصل إليها الجسم في المرحلة الأولى بسرعة v_B والنقطة التي سيتوقف فيها الجسم (S) .
حساب v_B نطبق كذلك مبرهنة الطاقة الحركية منذ انطلاقه من النقطة A إلى وصوله إلى النقطة B :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = F.\ell = m.a_1.\ell$$

$$v_B = \sqrt{2.a_1.\ell} = 1,22m/s$$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية لحساب d المسافة التي سيقطعها الجسم قبل توقفه :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = \underset{B\to f}{W}\left(\vec{P}\right) + \underset{B\to f}{W}\left(\vec{R}\right) + \underset{B\to f}{W}\left(\vec{F}\right)$$

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = -mgd\sin\alpha - R_T.d + F.d \Rightarrow -\frac{1}{2}mv_B^2 = m.d\left(-g\sin\alpha - kg.\cos\alpha + \frac{F}{m}\right)$$

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = m.a_2.d$$

$$d = -\frac{v_B^2}{2a_2} = 0,15m$$

IV ـ الحركة المستقيمية المتغيرة بانتظام

1 ـ تعريف

تكون لمركز القصور G لجسم صلب حركة مستقيمية متغيرة بانتظام ، إذا كان مسار G مستقيميا وإذا كانت $\vec{a}_G$ متجهة التسارع للنقطة G ثابتة خلال الحركة .

2 ـ المعادلة الزمنية للحركة

تعتبر أن جسما S يتحرك على مسار مستقيمي ، في معلم ديكارتي $\mathcal{R}(O,\vec{i})$ نمعلم مركز قصوره G في كل لحظة t بمتجهة الموضع $\overrightarrow{OG} = x.\vec{i}$ أي أم متجهة السرعة للنقطة G هي $\vec{v}_G = v_G.\vec{i}$.
نعتبر الشروط البدئية التالية : عند اللحظة $t_0 = 0$ لدينا $x = x_0$ و $v_G = v_0$.
نعلم أن

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = at + C$$

$$t = 0 \Rightarrow v = v_0 \Rightarrow C = v_0$$

$$v = at + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C'$$

$$t = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow C' = x_0$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$x(t)$ تمثل المعادلة الزمنية للحركة وهي تتعلق بالشروط البدئية .

تمارين حول قوانين نيوتن

تمرين 1

إحداثيات مركز القصور G لمتحرك في معلم ديكارتي $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي كالتالي :

$$x(t)=9t+3 \quad , \quad y(t)=0 \quad , \quad z(t)=6t^2+4t-3$$

1 ـ أوجد إحداثيات متجهة السرعة $\vec{v}_G$ في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ واحسب منظمها في اللحظة t=2s .

2 ـ أوجد إحداثيات متجهة التسارع $\vec{a}_G$ في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ واحسب قيمتها .

تمرين 2

شاحنة متوقفة تحمل قطعة جليد كتلتها m=20kg .

1 ـ أجرد القوى المطبقة على قطعة الجليد .

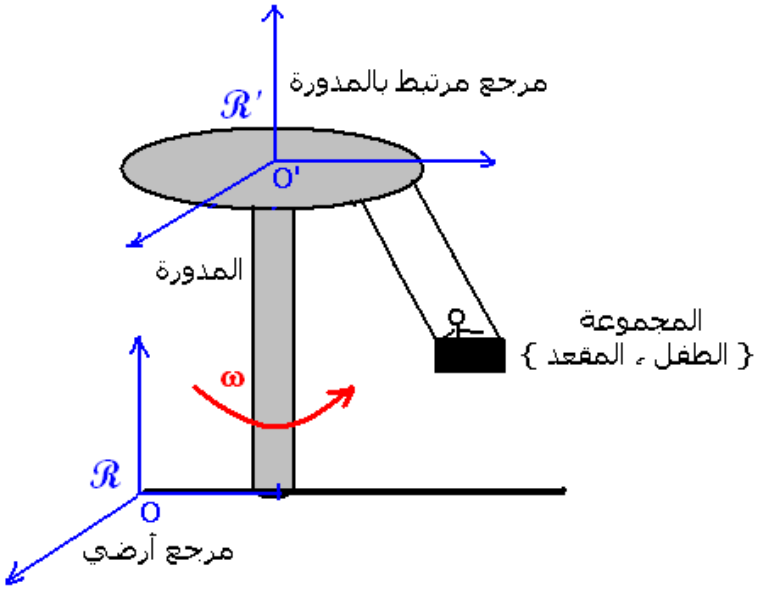
2

ماذا يمكن أن نقول عن المرجعين السابقين ؟

3 ـ تنطلق الشاحنة فتنزلق قطعة الجليد إلى الوراء ، فسر الظاهرة المشاهدة (نعتبر الاحتكاكات مهملة)

تمرين 3

تنجز مدورة ألعاب حركة دوران منتظم ، حول محور ثابت ، في مرجع أرضي . أخذ الطفل أحمد مقعده في هذه المدورة . نعتبر { الطفل ، المقعد } المجموعة المدروسة ونجسم هذه المجموعة بمركز قصورها G ، حيث كتلتها M .



1 ـ اجرد القوى المطبقة على المجموعة خلال حركة دورانه . ومثلها بدون سلم في مركز قصور المجموعة .

2 ـ نعتبر الجسم المرجعي $\mathcal{R}'$ مرتبط بالمدورة والجسم المرجعي الأرضي $\mathcal{R}$.

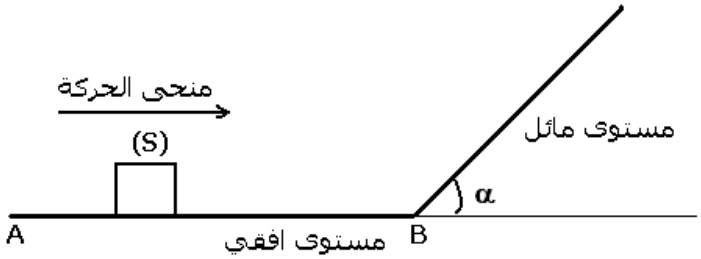
2 ـ 1 حدد الحالة الميكانيكية للمجموعة في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$. واستنتج تسارعها في المرجع $\mathcal{R}'$.

2 ـ 2 طبق القانون الثاني لنيوتن في $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$. ماذا تستنتج ؟

تمرين 4

1 ـ نعتبر جسما صلبا (S) كتلته M=200g ، موضوعا فوق مستوى أفقي بحيث يتم التماس بينهما بدون احتكاك . نطبق قوة أفقية ثابتة $\vec{F}$ شدتها F=0.5N و تسمح بتحريكه على المستوى الأفقي . خط تأثير القوة $\vec{F}$ موازي للمستوى الأفقي .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم الصلب (S) أثناء حركة مركز قصوره G ، بين أن طبيعة حركة مركز قصوره حركة مستقيمية متغيرة بانتظام . أحسب قيمة التسارع a_G لمركز قصوره .

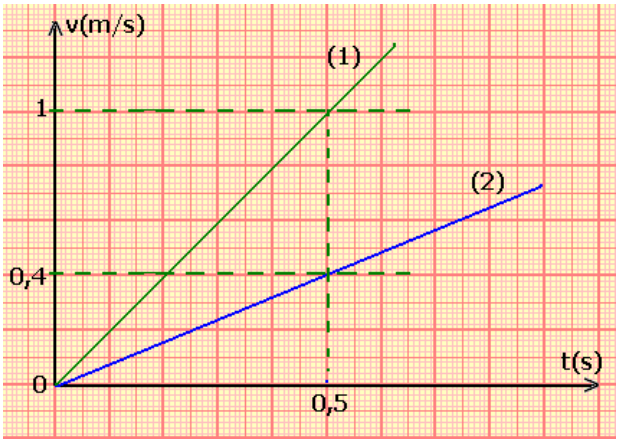


2 ـ في نقطة B ، تبعد عن النقطة A موضع انطلاقه بدون سرعة بدئية بمسافة ℓ=30cm ، يصعد الجسم (S) مستوى مائلا بالنسبة للمستوى الأفقي بزاوية $\alpha=5°$ حيث تبقى نفس القوة $\vec{F}$ مطبقة عليه ، خط تأثيرها موازي للمستوى المائل . نعتبر أن التماس بين المستوى المائل والجسم (S) يتم بالاحتكاك وأن معامل الاحتكاك في هذه الحالة هو k=0,1 .

ما هي طبيعة حركة مركز قصور الجسم (S) خلال حركته على المستوى المائل ؟

أحسب المسافة الدنوية التي يمكن أن يقطعها الجسم قبل توقفه .

تمرين 5



نطبق تباعا نفس القوة الأفقية $\vec{F}$ شدتها $F = 0,2N$ على حاملين ذاتيين (S_1) و (S_2) وضعا فوق منضدة هوائية أفقية . يمثل المنحنيان جانبه تغير سرعتي G_1 و G_2 مركزي قصور (S_1) و (S_2) .

1 ـ عيّن مبيانيا قيمتي a_1 و a_2 تسارعا G_1 و G_2 .

2 ـ أحسب m_1 كتلة S_1 و m_2 كتلة S_2 .

3 ـ ما مفعول كتلة حامل ذاتي على تسارع مركز قصوره ؟ علل جوابك .

4 ـ نطبق من جديد على S_1 قوة أفقية ثابتة $\vec{F}$ شدتها $F = 0,14N$ فينزلق فوق المنضدة الهوائية التي توجد دائما في وضع أفقي .

مثل منحنى تغيرات سرعة G_1 بدلالة الزمن t . نعتبر $v_G=0$ في اللحظة t=0 .

تمرين6

تسير سيارة سباق بسرعة 250km/h وفق مسار مستقيمي أفقي . فجأة يرفع السائق رجله على المسراع لتستقر القيمة المطلقة لتسارع G مركز قصور السيارة في $10m/s^2$.

نعتبر قوى الاحتكاك تكافئ قوة وحيدة $\vec{f}$ ثابتة .

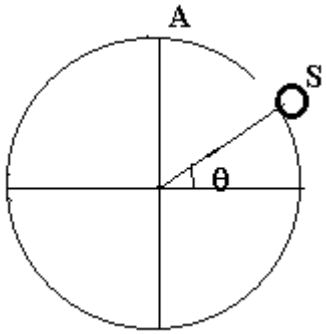
1 ـ احسب سرعة G بعد مرور ثانيتين ابتداء من لحظة رفع السائق رجله عن المسراع .

2 ـ حدد اتجاه ، ومنحى ، ومنظم مجموع القوى الخارجية المطبقة على المجموعة {السائق، السيارة } في هذه المرحلة .

3 ـ مثل ، بدون سلم ، كلا من $\vec{a}_G$ متجهة التسارع G ، و $\vec{v}_G$ متجهة سرعة G و $\sum \vec{F}_{ext}$ ، في نفس اللحظة t خلال هذه المرحلة .

تمرين 7

نضع جسما صلبا نماثله بنقطة مادية (S) كتلتها m في القمة Aلكرة شعاعها R = 1m . تم نحركها عن موضعها البدئي A بسرعة شبه منعدمة ، فتنزلق النقطة المادية بدون احتكاك على الكرة نحدد موضع بالزاوي θ



1 ـ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية ، أوجد تعبير متجهة السرعة ل S بدلالة θ قبل أن يغادر الكرة

2 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في أساس فريني أوجد تعبير شدة القوة المطبقة من طرف الكرة على (S) بدلالة θ .

3 ـ نستنتج قيمة الزاوية θ في اللحظة التي تترك فيها (S) الكرة .

السقوط الرأسي لجسم صلب

I ـ مجال الثقالة

تعريف

كل جسم موجود على سطح الأرض أو في الحيز المحيط بها يخضع لقوة مطبقة من طرف الأرض تسمى بوزن الجسم ونرمز لها ب $\vec{P}$. هذه القوة هي ناتجة عن المجال المحدث من طرف الأرض يسمى بمجال الثقالة ونرمز له ب $\vec{g}$

العلاقة بين $\vec{P}$ و $\vec{g}$ هي : $\vec{g}=\frac{1}{m}\vec{P}$ حيث m كتلة الجسم .

مميزات متجهة مجال الثقالة :

ـ الاتجاه : الرأسي المار من مركز قصور الجسم .

ـ المنحى : نحو الأرض

ـ المنظم : شدة مجال الثقالة ونعبر عنها بالوحدة N/kg^{-1}

ملحوظة : تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع وبخط العرض .

II ـ القوى المطبقة من طرف مائع .

1ـ قوى الاحتكاك المائع

كل جسم في حركة داخل مائع

تكافئ هذه القوى المطبقة من طرف المائع على الجسم المتحرك ، قوة وحيدة تسمى قوة المائع

مميزات قوة الاحتكاك المائع :

الأصل : مركز قصور الجسم

خط تأثيرها هو اتجاه متجهة سرعة مركز القصور G للجسم

المنحى : عكس منحى متجهة مركز فصور الجسم

الشدة :

المتحرك بالنسبة للمائع .

ننمذج شدتها بالعلاقة التالية : $f=k.v_G^n$ حيث k ثابتة تتعلق بطبيعة المائع وبشكل الجسم الصلب

نضع $v_G=v$ ، فتسبح العلاقة $f=k.v^n$.

ملحوظة : عندما تكون قيمة السرعة صغيرة ، نأخذ n=1 ، فتصبح العلاقة السابقة كالأتي : $f=k.v$ ، في هذه الحالة تتعلق k بلزوجة المائع .

عندما تكون قيمة السرعة v كبيرة ، نأخذ n=2 تصبح العلاقة السابقة $f=k.v^2$ في هذه الحالة ، لاتتعلق k بلزوجة المائع ، بل تتعلق بكتلته الحجمية.

2 ـ دافعة أرخميدس

يخضع كل جسم مغمور كليا أو جزئيا في مائع لقوى تماس ضاغطة مطبقة على سطح الجسم ، يسمي مجموع هذه القوى بدافعة أرخميدس .

مميزاتها هي :

ـ نقطة تأثيرها : مركز ثقل المائع المزاح

ـ الانجاه : الخط الرأسي

ـ المنحى : نحو الأعلى

ـ الشدة : تساوي شدة وزن الحجم المزاح للمائع : $\vec{F}_A=-\rho_f.V.\vec{g}$

بحيث أن ρ_f الكتلة الحجمية للمائع ب kg/m^3

V الحجم المزاح للمائع (m^3)

g : شدة مجال الثقالة (N/kg) أو m/s^2

F_A شدة دافعة أرخميدس (N)

ملحوظة : $\vec{F}_A = -\vec{P}_f$ ، $\vec{P}_f$ هي وزن الحجم المزاح .

نبين أن $\frac{\vec{F}_A}{\vec{P}_s} = \frac{\rho_f}{\rho_s}$ حيث P_s هو وزن الجسم الصلب المغمور في المائع و ρ_s كتلته الحجمية .

أذا كانت ρ_f أصغر بكثير من ρ_s فأن F_A تصغر بكثير من P_s هذه الحالة نجدها عندما يكون المائع غلزيا .

III ـ السقوط الرأسي باحتكاك

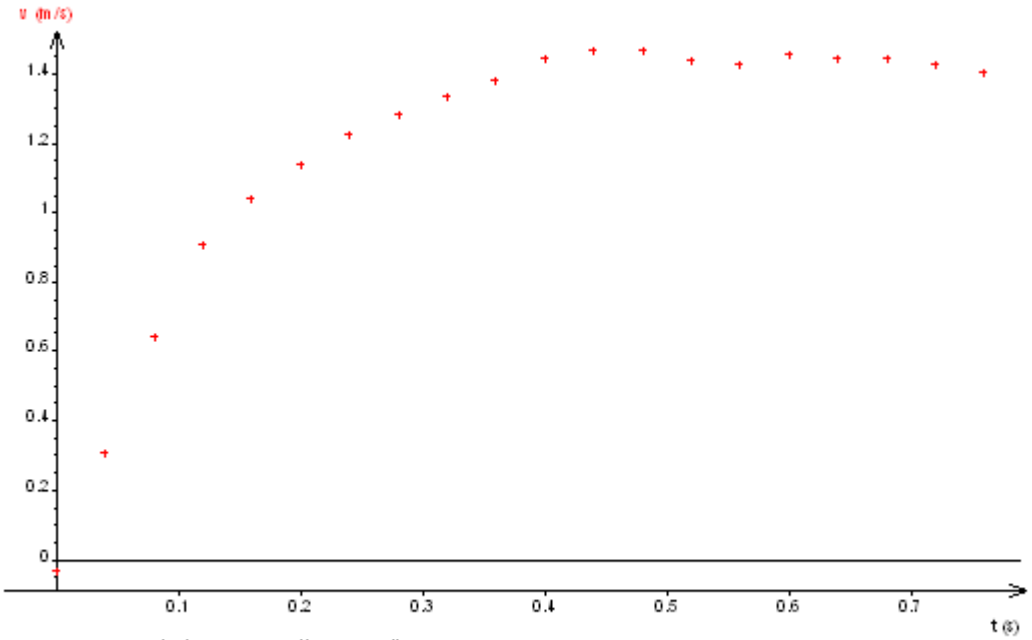
النشاط التجريبي

الهدف من التجربة : نمذجة حركة سقوط كرية في مائع بطريقة أولير

العدة التجريبية : مخبار مدرج من فئة 1ℓ . محلول الغليسيرول المخفف كتلته الحجمية $\rho_f = 1,07 g/m\ell$ ، كرية فولاذية كتلتها m_b=6,88g وشعاعها R=5,9mm نسجل حركة الكرية في السائل بواسطة كاميرا رقمية ونحفظ الشريط المسجل لحركة الكرية في ملف من نوع

نستعمل برنم أفيميكا Avimeca لعملية تحديد مواضع النقط الموافقة لمواضع G مركز قصور الكرية خلال سقوطها مع اختيار محور رأسي موجه نحو الأسفل فنكتب قيم الأزواج (t,y) .

نرسل جدول القياس إلى برنم المجدول وراسم المنحنيات regressi ، وبعد تعريف إحداثية متجهة السرعة $\vec{v}_G$ وهي $v = \frac{dy}{dt}$ ، يقوم البرنم بحساب قيم v ثم رسم منحنى تغيرات v بدلالة الزمن t على الشاشة ، ثم نحفظ الملف .



منحنى تغير سرعة مركز قصور الكرية خلال سقوطها في سائل الغليسيرول مخفف

استثمار

1 ـ استغلال المنحنى v=f(t)

أ ـ يبرز المنحنى وجود نظامين ، حدد مبيانيا المجال الزمني لكل نظام مبرزا طبيعة حركة الكرية في كل نظام .

ب ـ هل تتزايد أم تتناقص متجهة التسارع $\vec{a}_G$ مركز قصور الكرية خلال الحركة ؟ علل جوابك .

ج ـ مثل على الشكل الخط المقارب للمنحنى .

يمثل نقطة تقاطع هذا الخط مع محور السرعات قيمة السرعة الحدية v_ℓ . حدد قيمة v_ℓ .

د ـ مثل في نفس المنحنى ، المماس للمنحنى عند الأصل O . يتقاطع هذا المماس على الخط المقارب في نقطة أفصولها τ نسميه الزمن المميز . عين قيمة τ .

ه ـ ما قيمة a_0 لإحداثية $\vec{a}_0$ على المحور الرأس عند اللحظة t=0 ؟

2 ـ الدراسة النظرية

أ ـ أذكر مرجعا يمكن اعتماده في دراسة حركة G مركز قصور الكرية .

ب ـ أثنا سقوط الكرية ، ما هي القوى المطبقة عليها . حدد مميزات كل القوى المطبقة على الكرية . حدد من بين القوى الثلاث ، القوة التي تتغير شدتها خلال النظام البدئي .

ج ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرية أثناء سقوطها الرأسي في المائع في مرجع تحدده ، أكتب العلاقة التي تربط بين مجموع القوى الخارجية المطبقة على الكرية و m كتلة الكرية ومتجهة التسارع لمركز قصور الجسم $\vec{a}_G$.

د ـ بإسقاط هذه العلاقة على المحور $(O,\vec{k})$ الرأسي الموجه نحو الأسفل ، أثبت العلاقة التالية :

$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$ (1) . عبر عن A و B بدلالة m و k و F_A و g شدة الثقالة .

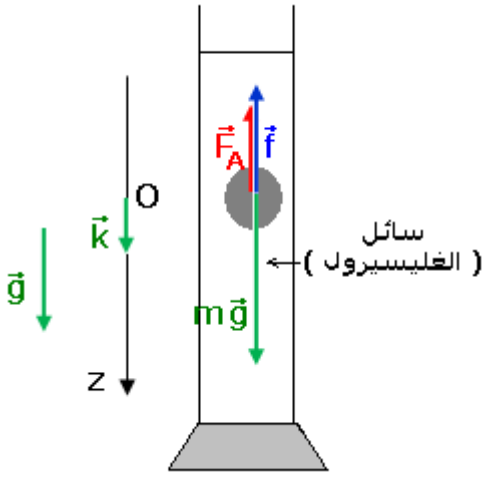
ه ـ بين أن سرعة G تبلغ قيمة حدية v_ℓ ، واعط تعبير v_ℓ بدلالة A و B و n .

و ـ أثبت أن العلاقة (1) تكتب على النحو التالي : $(2)\ \frac{dv}{dt} = A\left(1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^n\right)$

ز ـ أوجد التعبير الحرفي للإحداثية a لمتجهة التسارع $\vec{a}_G$ على المحور $(O,\vec{k})$ في اللحظة t=0

1 ـ المعادلة التفاضلية للحركة

دراسة حركة كرية كتلتها m و حجمها V وكتلتها الحجمية ρ_{bille} في مائع كتلته الحجمية ρ_{fluide} في حالة سكون بالنسبة للجسم المرجعي الأرضي .



بما أم حركة الكرية رأسية ومنحاه نحو الأسفل ، نختار كمعلم متعامد و ممنظم موجه نحو الأسفل $(O,\vec{k})$.

ـ المجموعة المدروسة : الكرية

ـ جرد القوى المطبقة الخارجية حلال سقوطها :

$\vec{P}$: وزن الكرية ، $\vec{P} = m.\vec{g}$

$\vec{F}_A$: دافعة أرخميدس : $\vec{F}_A = -m_f.\vec{g} = -\rho_f.V.\vec{g}$

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع : $\vec{f} = -k.v^n.\vec{k}$

ـ نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m_{bille}.\vec{a}_G$ حيث أن $\vec{a}_G = \vec{a}$ متجهة التسارع لمركز قصور الكرية

نسقط العلاقة المتجهية على المحور $(O,\vec{k})$ ، نحصل على المتساوية التالية :

$$m_{bille}g - m_f g - kv^n = m_{bille}.a$$

$$(m_b - m_f)g - kv^n = m_b.\frac{dv}{dt}$$

$$A = \frac{(m_b - m_f)}{m_b}g \qquad B = \frac{k}{m_b}$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

تمثل هده المعادلة ، المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية خلال السقوط الرأسي في السائل

2 ـ تحديد المقادير المميزة للحركة

أ ـ النظام الدائم : السرعة الحدية للكرية

تبين التجربة أن v_ℓ

بحيث تصبح حركة الكرية حركة مستقيمية منتظمة أي أن : $\frac{dv}{dt} = 0$

في المعادلة التفاضلية للحركة نستنتج :

$$A - Bv_\ell^n = 0 \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_\ell = \left(\frac{g}{k}\left(m_b - m_f\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

ـ عندما تقارب سرعة الكرية السرعة الحدية v_ℓ تخضع حركة G إلى نظام يسمى **النظام الدائم** ويتميز بثبات السرعة .

ب ـ النظام البدئي

قبل تحرير الكرية فهي تخضع إلى قوى مجموعها منعدم .

في اللحظة $t_0=0$

الرأسي للكرية وتتزايد سرعتة مركز قصورها : تسمى هذه المرحلة **بالنظام البدئي** بعد ذلك تتطور حركة G نحو نظام دائم يصبح فيه مجموع القوة المطبقة عاى الكرية مرة أخرى منعدم : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

أي أن a=0 .

في المعادلة التفاضلية ، عند اللحظة $t_0 = 0$ لدينا $a_G(t_0 = 0) = a_O = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_0=0}$ بحيث أن a_0 هو

التسارع البدئي لمركز القصور G للكرية . لدينا كذلك $\vec{f} = \vec{0}$

$$(m_b - m_f)g = m_b.a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{(m_b - m_f)g}{m_b}$$

مبيانيا ، تساوي قيمة التسارع البدئي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى $t_0=0$.

ج ـ الزمن المميز للحركة

يتقاطع الخط المماس للمنحنى v=f(t) مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ نسميه **الزمن المميز للحركة**

تحدد قيمة τ بالعلاقة : $v_\ell = a_0\tau$

ملحوظة : تمكن قيمة τ من إعطاء رتبة قدر مدة النظام البدئي .

3 ـ حل المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق طريقة أولير Euler

أ ـ مبدأ الطريقة

ـ تمكن طريقة أولير من التوصل لحل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة بتعويض
بحيث نعلم أن

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\Rightarrow a(t)=\left(\frac{dv}{dt}\right)\approx\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t+\Delta t)=v(t)+a(t).\Delta t \qquad (1)$$

تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب التي يجب إنجازها بصفة تكرارية لهذا نم وصفها بطريقة رقمية تكرارية . كما أن استعمال هذه الطريقة يستوجب معرفة سرعة مركز القصور في لحظة t والتي ما تكون في غالب الأحيان هي السرعة البدئية v_0 في اللحظة t=0 .
المرحلة الأولى :
من خلال العلاقة (1) والتي يمكن كتابتها على الشكل التالي : $v(t_{i+1})=v(t_i)+a(t_i).\Delta t$ بحيث أن

$$a_i=A-B.v_i^n$$

عند اللحظة t=0 لدينا $a_0=A-Bv_0^n$
في المرحلة الثانية :
نحسب $v_1=v_0+a_0v_0^n\Delta t$
Δt تسمى خطوة الحساب
ونعيد حساب التسارع والسرعة المواليين بنفس الطريقة
ثم نبحث عن قيم n و A و B التي تمكن من تطابق القيم النظرية المحصلة باستعمال طريقة أولير مع القيم التجريبية أي تطابق المنحنيين .

VI ـ السقوط الرأسي الحر .

1 ـ تعريف

السقوط الحر لجسم صلب هو حركة مركز القصور هذا الجسم في مرجع أرضي عندما يخضع الجسم لقوة الثقالة فقط .
نظريا يكون السقوط حرا إذا تم قي الفراغ ،
عالية وشكله انسيابي ، ومنطقة سقوطه محدودة في مجال الثقالة .
2 ـ متجهة التسارع a_G لمركز القصور .
نعتبر السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة وفي مرجع أرضي . أي أن الجسم يوجد تأثير وزنه فقط .
نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}=m.\vec{g}=m\vec{a}_G$ أي أن $\vec{g}=\vec{a}_G$
3 ـ المعادلة الزمنية للحركة
في المعلم $(O,\vec{k})$ الموجه نحو الأسفل نسقط العلاقة فنحصل على :

$$a_z=g\Rightarrow\frac{dv_z}{dt}=g\Rightarrow v_z=gt+C$$

نحدد الثابتة C بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة $t_0=0$ أن $v_G(t=0)=v_0=0$ أي أن $v_z=gt$ ونستنتج أن سرعة G دالة زمنية خطية .
بنفس الطريقة نبحث عن z(t) :

$$v_z=\frac{dz}{dt}=gt\Rightarrow z(t)=\frac{1}{2}gt^2+C'$$

، نحدد كذلك الثابتة C′ بالشروط البدئية . نأخذ عند اللحظة t=0 أن $z(0)=z_0=0$ وبالتالي فإن C′=0 أي أن المعادلة الزمنية لحركة السقوط الحر للجسم الصلب بدون سرعة بدئية ومن النقطة O تم اختيارها كأصل معلم الزمن هي : $z(t)=\frac{1}{2}gt^2$.
وهذه المعادلة نعممها بالنسبة لجميع الأجسام الصلبة التي تطلق بدون سرعة بدئية في سقوط حر أي أنها تسقط بنفس الحركة ، **حركة مستقيمية متغيرة بانتظام** .

تمرين تطبيقي 1 :

I ـ تسقط كرة رأسيا بدون سرعة بدئية . نعتبر السقوط حرا ونقوم بدراسته في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأسفل .

1 ـ ما طبيعة مسار G مركز قصور الكرة ؟

2 ـ أجرد القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها . ما القوى التي نهملها أمام وزن الجسم ؟ وما هي الشروط لكي نقوم بهذا الإهمال ؟

3 ـ عبر بدلالة الزمن t عن الأنسوب z للنقطة G .

4 ـ أحسب السرعة التي ستصل بها الكرة إلى الأرض . نعطي h=2m .

II ـ السرعة البدئية في اللحظة t=0 لمركز قصور الكرة أرسلت رأسيا نحو الأعلى تساوي v_0=15,0m/s

1 ـ اعط تعبير الإحداثية v لمتجهة السرعة لمركز القصور الكرة لمحور رأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى للمعلم المتعامد والممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2 ـ أوجد تعبير t_M تاريخ اللحظة الموافقة للارتفاع الأقصى z_M للنقطة G ، واحسب قيمته .

3 ـ أحسب قيمة z_M .

تمارين حول السقوط الرأسي لجسم صلب
خاص بالعلوم الرياضية والعلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية

بالنسبة لجميع التمارين نأخذ :

شدة مجال الثقالة $g = 9,81m/s^2$ ، الكتلة الحجمية للهواء : $\rho_{air} = 1,3kg/m^3$ الكتلة الحجمية للماء : $\rho_{eau} = 1,0.10^3 kg/m^3$. حجم كرة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

تمرين 1 السقوط الحر مرة أخرى

نطلق كرة بدون سرعة بدئية بحيث أنها تقطع مسافة 20m عند الثانية ما قبل الأخيرة من سقوطها .

نأخذ $g=10m/s^2$. نعتبر أن السقوط حرا .

1 ـ ماهي مدة سقوطها ؟

2 ـ أحسب سرعة الكرية خلال قطعها مسافة 10m .

3ـ احسب سرعتها عند وصولها إلى سطح الأرض ,

تمرين 2

نرسل نحو الأعلى بسرعة بدئية $v_{01} = 30m/s$ كرة ، وبعد ثانية (1s)نرسل كرة أخرى في نفس اتجاه الكرة الأولى ، نحو الأعلى ، بسرعة بدئية $v_{02} = 40m/s$ حدد اللحظة t والموضع z الذي ستلتقي فيه الكرتان .

تمرين 3 سقوط مضلي ولوازمه

يقفز مضلي ولوازمه من طائرة توجد على ارتفاع h من سطح الأرض . كتلة المضلي ولوازمه m ونأخذ قيمة شدة مجال الثقالة $g=9,81m/s^2$.

نقبل أن مجموع القوى المطبقة من طرف الهواء على المظلي يمكن نمذجتها بقوة الاحتكاك $f = k.v^2$ بحيث أن $k = 0,78SI$.

1 ـ أنطلاقا من معادلة الأبعاد حدد وحدة الثابتة k في النظام العالمي للوحدات (SI) .

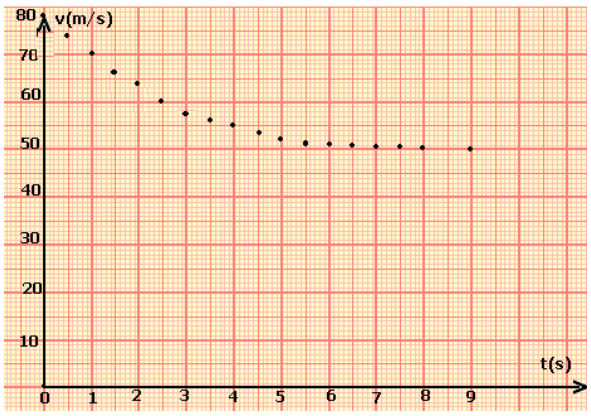
2 ـ أوجد المعادلة التفاضلية خلال سقوط المظلي ولوازمه باعتبار المحور الرأسي $(O,\vec{k})$ وموجها نحو الأسفل . نهمل دافعة أرخميدس .

3 ـ لتحديد تغير السرعة خلال الزمن t نستعمل طريقة أولير حيث نختار خطوة الحساب $\Delta t = 0,5s$.

3 ـ 1 لتكن v_n السرعة في اللحظة t_n و v_{n+1} السرعة في اللحظة $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ، بين أن المعادلة التفاضلية السابقة يمكن أن تكتب على الشكل التالي :

$v_{n+1} = v_n + A - B.v_n^2$ حيث $A = 4,9SI$ و $B = 1,95.10^{-3} SI$.

حدد بدقة وحدة الثابتتين A و B في النظام العالمي للوحدات .



3 ـ 2 باستعمال المبيان جانبه والذي يمثل تغيرات السرعة v بدلالة الزمن t التي تم حسابها بواسطة العلاقة السابقة ، عين :

أ ـ رتبة قدر المدة اللازمة ليصل المظلي ولوازمه إلى السرعة الحدية ،

ب ـ قيمة السرعة الحدية ، وعبر عنها بالوحدة km/h

ج ـ قيمة الزمن المميز للحركة

تمرين 4 : فقاعة من الهواء في مسبح

في عمق مسبح حيث $z_0 = -3,0m$ أحدث غطاس فقاعة صغيرة من الهواء عند اللحظة $t = 0s$. نقبل أن الفقاعة كروية الشكل .

بدئيا يكون شعاع الفقاعة $r(z_0) = r_0 = 0,50mm$.

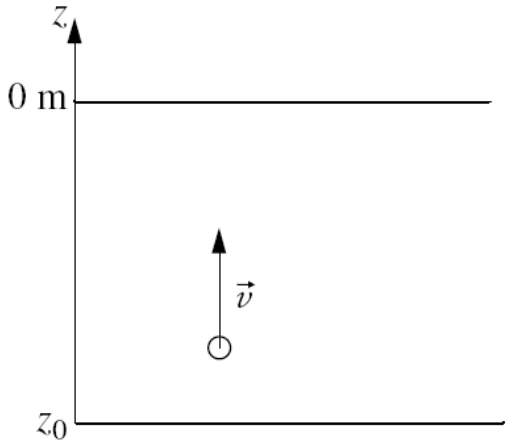
درجة حرارة الماء والهواء الموجود في الفقاعة ثابتة : $T_0 = 300K$.

ضغط الماء في حوض المسبح يتغير مع العمق z من خلال العلاقة التالية : $p_{eau}(z) = p_{atm} - \rho gz$

$p_{atm} = 1,0.10^5 Pa$ الضغط على سطح الماء z=0

$\rho = 1,0.10^3 kg/m^3$ الكتلة الحجمية للماء ،

$g = 9,8m/s^2$ شدة مجال الثقالة .



ضغط الهواء الموجود في الفقاعة يساوي ضغط الماء في العمق نفسه أي أن $p_{air}(z) = p_{eau}(z)$.

نعطي ثابتة الغازات الكاملة : $R = 8,314S.I$.

1 ـ نفترض أن الهواء الموجود في الفقاعة غاز كامل ، أوجد تعبير شعاع الفقاعة $r(z)$ بدلالة العمق z .

2 ـ أحسب كمية مادة الهواء الموجودة في الفقاعة n_{air} .

3 ـ أحسب شعاع الفقاعة عند وصولها إلى سطح الماء .

نهمل تغير شعاع الفقاعة ، إذا كان التغير أصغر من 10% (بالقيمة المطلقة) من القيمة البدئية .

هل يمكن إهماله ؟

4 ـ إذا كانت الكتلة المولية للهواء $M(air) = 29g/mol$ ، أحسب الكتلة m للفقاعة ثم أعط مميزات المتجهة $\vec{P}$ وزن الفقاعة .

5 ـ أعط مميزات دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$ التي تخضع إليها الفقاعة بدلالة الشعاع r_0 .

6 ـ تخضع الفقاعة كذلك إلى قوة الاحتكلك المائع وهي تكتب على الشكل التالي : $\vec{f} = -6\pi.\eta.r_0.\vec{v}$

بحيث أن $\eta = 1,0.10^{-3} Pa.s$ لزوجة الماء و r_0 شعاع الفقاعة و $\vec{v}$ متجهة سرعتها .

6 ـ 1 مثل على تبيانة القوى المطبقة على الفقاعة . (بدون سلم)

6 ـ 2

للفقاعة بدلالة الزمن .

7 ـ حل المعادلة التفاضلية هو كالتالي : $v(t) = v_\ell \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

باعتبار أن $A + Be^x$ منعدمة بالنسبة للقيم x إذا كانت $A = B = 0$ ، حدد قيم المقادير التالية : v_ℓ و τ باعتبار أن $v(t)$ حلا للمعادلة التفاضلية .

8 ـ حدد السرعة القصوية للفقاعة .

تطبيقات : الحركات المستوية
Application M mouvements plans

I ـ حركة قذيفة في مجال الثقالة

نسمي قذيفة كل جسم تم إرساله من سطح الأرض بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ على أن يبقى قريبا من سطح الأرض .

خلال هذه الدراسة ، نهمل قوى الآحتكاك مع الهواء ، ونعتبر أن القذيفة خاضعة لوزنها فقط أي حركتها سقوط حر .

1 ـ متجهة التسارع

نرسل من نقطة O قذيفة (كرية) ذات كتلة m بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير راسية أي أنها تكون زاوية α مع المستوى الأفقي Oxy ، نسمي الزاوية α بزاوية القذف. نعتبر أن مجال الثقالة منتظم .

ندرس حركة القذيفة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا ، بحيث نمعلم مواضع G مركز قصور القذيفة في كل لحظة بإحداثياتها في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بالمرجع الأرضي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

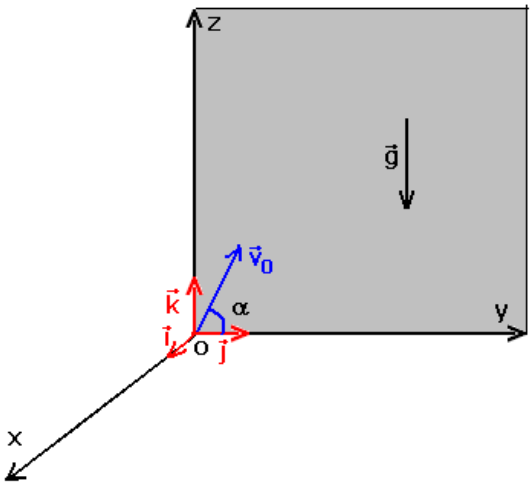
تخضع القذيفة إلى وزنها فقط أي أن $\vec{P}=m.\vec{a}_G$ ومنه $\vec{a}_G=\vec{g}$ (1)

إحداثيات $\vec{a}_G$ في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

على المحور $(O,\vec{i})$ لدينا $a_x=0$

على المحور $(O,\vec{j})$ لدينا $a_y=0$

على المحور $(O,\vec{k})$ لدينا $a_z=-g$



أي أن متجهة التسارع $\vec{a}_G$ رأسية منحاها من الأعلى نحو الأسفل ومنظمها يساوي عدديا منظم متجهة الثقالة $\vec{g}$.

2 ـ متجهة السرعة

لدينا حسب متجهة التسارع :

$$\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=0\\ \dfrac{dv_y}{dt}=0\\ \dfrac{dv_z}{dt}=-g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=C_1\\ v_y=C_2\\ v_z=-gt+C_3\end{cases}$$

C_1,C_2,C_3 ثوابت تحدد انطلاقا من الشروط البدئية .

أن متجهة السرعة البدئية توجد في المستوى (Oyz)

عند اللحظة $t_0=0$ لدينا :

$$\vec{v}_0\begin{cases}v_{0x}=0\\ v_{0y}=v_0\cos\alpha\\ v_{0z}=v_0\sin\alpha\end{cases}$$ وبالتالي ستكون

أي أن إحداثيات متجهة السرعة في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي :

(2) $\vec{v}_G \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

3 ـ المعادلات الزمنية للحركة :

لدينا :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_4 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t + C_5 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_6 \end{cases}$$

بحيث أن C_4, C_5, C_6 توابث يجب تحديدها انطلاقا من الشروط البدئية أي أنه في اللحظة $t_0 = 0$ لدينا :

$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$ وبالتالي فإن $\overrightarrow{OG_0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

وبالتالي تكون إحداثيات النقطة G في اللحظة t في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي كالتي :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t \quad (1) \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \quad (2) \end{cases}$$

من خلال هذه المعادلات يتبين أن حركة G تتم في المستوى الرأسي (Oyz) نقول أن **الحركة مستوية**

ـ على المحور $(O, \vec{j})$ ، حركة G حركة مستقيمية منتظمة

ـ على المحور $(O, \vec{k})$ ، حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

4 ـ معادلة المسار

معادلة المسار هي العلاقة التي تجمع بين إحداثيتي النقطة المتحركة G ونحصل عليها بإقصاء المتغير t بين y و z .

من المعادلتين الزمنيتين (1) و (2) نحصل على :

$$y = (v_0 \cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

أي أن معادلة المسار هي :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \sin^2\alpha}y^2 + y\tan\alpha$$

نستنتج أن مسار مركز قصور قذيفة في سقوط حر بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير رأسية في مجال الثقالة منتظم هو جزء من شلجم ينتمي إلى المستوى الرأسي الذي يحتوي على المتجهة $\vec{v}_0$.

5 ـ بعض مميزات المسار

أ ـ قمة المسار : (la flèche) هي أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

عند وصول مركز قصور القذيفة إلى قمة المسار F تكون لدينا

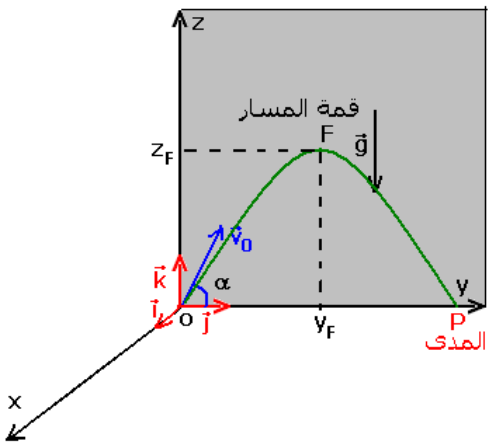
$\frac{dz}{dt}=0$ بالنسبة ل $y=y_F$

من خلال المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{dz}{dt}=-gt_F+v_0\sin\alpha=0\Rightarrow t_F=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

نعوض t_F في المعادلة (1)

$$y_F=\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\Rightarrow y_F=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$$
$$z_F=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$



ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار إذا كان

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ أي في حالة إرسال قذيفة رأسيا نحو الأعلى .

ب ـ المدى la portée

هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القديفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لتكن y_P و z_P إحداثيتا النقطة P ، لدينا : $z_P=0$

أي أن

$$y_P\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha}y_p+\tan\alpha\right)=0\Rightarrow\begin{cases}y_p=0\\ ou\\ y_p=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\end{cases}$$

II ـ حركة دقيقة مشحونة في مجال كهرساكن منتظم .

1 ـ المجال الكهرساكن

أ ـ المجال الكهرساكن المحدث من طرف شحنة نقطية

تحدث دقيقة مشحونة شحنتها q توجد في نقطة O من الفراغ ، مجالا كهرساكنا في نقطة M متجهته $\vec{E}(M)$ بحيث أن :

$$\vec{E}(M)=\frac{\vec{F}(M)}{q}$$

نعبر عن الشحنة q بالكولوم (C)

وعن F بالوحدة النيوتن N

وعن E شدة المجال الكهرساكن ب (N/C)

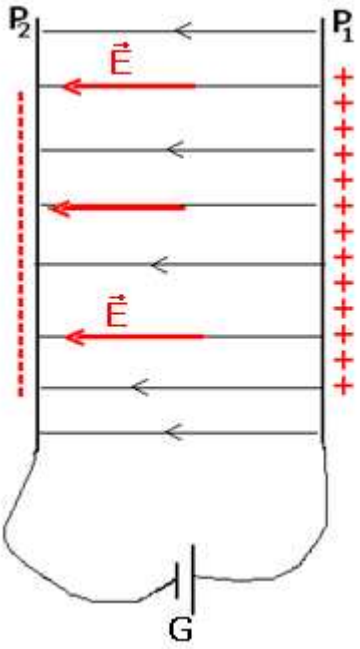
ملحوظة :

ـ $F=qE$ في حالة أن $q>0$

ـ $F=|q|E$ في حالة $q<0$

ـ يبرز وجود مجال كهرساكن في نقطة ما بوضع دقيقة مشحونة في تلك النقطة حيث تخضع إلى قوة كهرساكنة .

ب ـ خطوط المجال



نسمي خط المجال الكهرساكن كل منحنى (أو مستقيم) تكون متجهة مجال الكهرساكن مماسة له في كل نقطة من نقطه .

ج ـ المجال الكهرساكن المتظم

يكون المجال كهرساكن منتظما إذا كان لمتجهته $\vec{E}$ ، في كل نقطة من نقطه ، نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم .

إذا كان المجال الكهرساكن منتظما تكون خطوط المجال عبارة عن مستقيمات متوازية .

يتحقق المجال الكهرساكن المنتظم بتطبيق توتر مستمر ثابت بين صفيحتين فليزيتين متوازيتين لهما أبعاد أكبر بكثير من المسافة d التي تفصلهما .

لدينا حسب الشكل جانبه : $U = V_{P_1} - V_{P_2} > 0$

عند تطبيق توتر كهربائي مستمر U على صفيحتين فليزيتين لهما أبعاد أكبر بكثير من المسافة d التي تفصلهما تكون متجهة المجال الكهرساكن $\vec{E}$ ثابتة ، وعمودية على الصفيحتين ، وموجهة نحو الجهود التناقصية ومنظمها هو : $E = \frac{U}{d}$ بحيث أن :

U التوتر المطبق بين الصفيحتين بالفولط (V)

d المسافة الفاصلة بين الصفيحتين .

E شدة المجال الكهرساكن نعبر عنه V/m

2 ـ حركة دقيقة في مجال كهرساكن منتظم

نعتبر دقيقة مشحونة ، ذات كتلة m وشحنة q بحيث أن $(q<0)$ مثلا إلكترون ، توجد في مجال كهرساكن منتظم .

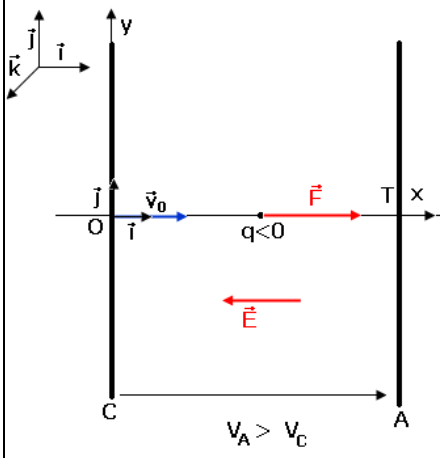
جرد القوى المطبقة على الدقيقة :

$\vec{F}$ القوة الكهرساكنة بحيث أن $\vec{F} = q\vec{E}$ وإلى وزنها $\vec{P}$ الذي نهمل شدته أمام F .

باعتبار مرجع أرضي كمرجعا غاليليا نطبق القانون الثاني لنيوتن على الدقيقة أثناء حركتها في معلم مرتبط بالمرجع الأرضي :

$\vec{F} = m.\vec{a}$ حيث $\vec{a}$ متجهة تسارع الدقيقة .

يتعلق مسار الدقيقة باتجاه $\vec{v}_0$ متجهة السرعة البدئية للدقيقة لحظة دخولها المجال الكهرساكن المنتظم ، بالنسبة لاتجاه $\vec{E}$:



الحالة الأولى : $\vec{v}_0$ متوازية مع $\vec{E}$

تدخل دقيقة مشحونة $(q<0)$ المجال الكهرساكن $\vec{E}$ في النقطة O في اللحظة $t_0 = 0$ بالسرعة $\vec{v}_0$ متوازية مع $\vec{E}$.

لدينا العلاقة : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

نسقط هذه العلاقة في المعلم المتعامد والممنظم المرتبط بالمرجع الأرضي ، $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فنحصل على إحداثيات متجهة التسارع ومتجهة السرعة ومتجهة الموضع ، باعتبار الشروط البدئية التالية :

$$O\begin{cases}0\\0\\0\end{cases} \text{ و } \vec{v}_0\begin{cases}v_0\\0\\0\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x_M = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_0 t \\ y_M = 0 \\ z_M = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x = -\frac{qE}{m}t + v_0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{a}\begin{cases} a_x = -\frac{qE}{m} \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

نستنتج من خلال هذه المعادلات أنه ليست هناك حركة على المحورين (Oy) و (Oz) بل تتم حركة الدقيقة على المحور (Ox) وبالتالي فإن حركة الدقيقة على هذا المحور مستقيمية متغيرة بانتظام .

هل هذه الحركة متسارعة أم متباطئة ؟

بتحديد الجداء السلمي التالي : $\vec{a}.\vec{v} > 0$ وبالتالي فالحركة مستقيمية متسارعة .

حالة خاصة : مدفع الإلكترونات حيث تكون السرعة البدئية v_0 للإلكترون مهملة وتقارب الصفر .

في هذه الحالة تكون معادلات حركة الإلكترون هي :

$$x = \frac{eE}{2m}t^2 \quad , \quad v_x = \frac{eE}{m}t \quad , \quad a_x = \frac{eE}{m}$$

يمكن حساب السرعة التي تغادر بها الإلكترون الثقب T وذلك بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الإلكترون بين O و T :

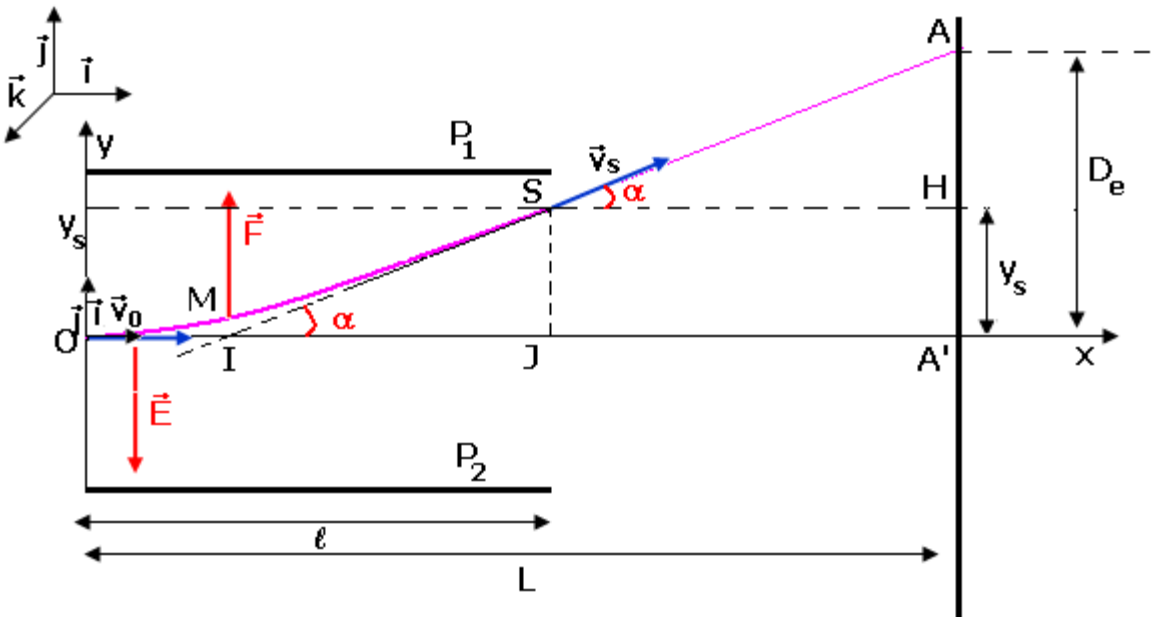
$$\overset{T}{O}\Delta E_C = \underset{O\to T}{W}\left(\vec{F}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eU_{AC}$$

$$U_{AC} = E.d \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = eE.d$$

وبالتالي تكون سرعة الإلكترون هي : $v = \sqrt{\frac{2e.E.d}{m}}$ وتكون هذه السرعة جد عالية ونلاحظ أن هذه السرعة تكبر كلما تزايدت شدة المجال الكهرساكن $\vec{E}$ ، نقول أن المجال الكهرساكن يتصرف **كمسرع للدقيقة .**

الحالة الثانية : $\vec{v}_0$ عمودية على $\vec{E}$

تدخل دقيقة مشحونة $(q<0)$ في اللحظة $t_0 = 0$ بالسرعة $\vec{v}_0$ عمودية على متجهة المجال الكهرساكن المنتظم $\vec{E}$ في النقطة O.



أ ـ متجهة التسارع :

متجهة التسارع للدقيقة في المجال $\vec{E}$ هي : $\vec{a}=\frac{q\vec{E}}{m}$ في مرجع أرضي .

نسقط العلاقة في المعلم المتعامد والممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{E}=-E\vec{j}$

$\vec{E}\begin{cases}0\\-E\\0\end{cases}$ و $\vec{a}\begin{cases}a_x\\a_y\\a_z\end{cases}$ ونستنتج من خلال القانون الثاني لنيوتن أن $\vec{a}\begin{cases}a_x=0\\a_y=-\frac{qE}{m}\\a_z=0\end{cases}$

ب ـ المعادلات الزمنية

باعتبار الشروط البدئية التالية :

$\vec{v}_0\begin{cases}v_0\\0\\0\end{cases}$ و $\overrightarrow{OM_0}\begin{cases}0\\0\\0\end{cases}$ نحصل على إحداثيات متجهة السرعة : $\vec{v}\begin{cases}v_x=v_0\\v_y=-\frac{qE}{m}t\\v_z=0\end{cases}$ وعلى المعادلات الزمنية

في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أي أن $\overrightarrow{OM}\begin{cases}x=v_0t\\y=-\frac{qE}{m}t^2\\z=0\end{cases}$

نستنتج أن حركة الدقيقة في مجال كهرساكن منتظم عمودي على متجهة السرعة البدئية $\vec{v}_0$ ، تتم في المستوى (Oxy) إذن فهي حركة مستوية .

على المحور $(O,\vec{i})$ حركة مستقيمية منتظمة

على المحور $(O,\vec{j})$ حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

ج ـ معادلة المسار ،

نحصل على معادلة المسار بإقصاء الزمن t بين المعادلتين الزمنيتين x(t) و y(t) :

في المعادلة الزمنية y(t) لدينا : $y=-\frac{qE}{2mv_0^2}x^2$ بحيث أن $q<0$. $t=\frac{x}{v_0}$

مسار الدقيقة المشحونة في مجال كهرساكن منتظم عمودي على متجهة السرعة البدئية $\vec{v}_0$ عبارة عن جزء من شلجم .

د ـ سرعة الدقيقة لحظة خروجها من المجال الكهرساكن :

لدينا حسب الشكل أعلاه أن إحداثياتي S نقطة خروج الدقيقة من المجال الكهرساكن هما :

$S\begin{cases}x_s=\ell\\y_S=-\frac{qE}{2mv_0^2}\ell^2\end{cases}$ وتوجد الدقيقة في النقطة S عند اللحظة $t_S=\frac{\ell}{v_0}$ في المعادلات السرعة نحصل على :

$\vec{v}_S\begin{cases}v_{Sx}=v_0\\v_{Sy}=-\frac{qE}{m}\left(\frac{\ell}{v_0}\right)\end{cases}$

تكون المتجهة $\vec{v}_S$ مع الاتجاه الأفقي زاوية α تسمى **الانحراف الزاوي** بحيث أن

$$\tan\alpha = \frac{v_{Sy}}{v_{Sx}} = -\frac{qE}{mv_0^2}$$

ه ـ الانحراف الكهرساكن :

طبيعة حركة الدقيقة عند مغادرتها المجال الكهرساكن :

عند خروجها من المجال الكهرساكن فالقوى المطبقة عليها هي وزنها فقط وبإهماله ، حسب مبدأ القصور تكون حركة الدقيقة مستقيمية منتظمة سرعتها $\vec{v}_S$. فتصطدم بشاشة مستشعة عمودية على المحور $(O,\vec{i})$. نعطي $OA' = L$ المسافة الفاصلة بين الشاشة والنقطة O نقطة انطلاق الدقيقة نسمي D_e **الانحراف الكهربائي** وهو المسافة بين النقطة A' نقطة اصطدام في غياب المجال الكهرساكن و A نقطة اصطدام بوجود المجال الكهرساكن . من خلال الشكل لدينا :

$D_e = A'A = A'H + HA$ بحيث أن $A'H = y_s$ و $\tan\alpha = \frac{AH}{L-\ell}$ أي أن $D_e = y_s + (L-\ell)\tan\alpha$

حسب العلاقات السابقة لدينا :

$D_e = -\left(L - \frac{\ell}{2}\right)\frac{qE\ell}{mv_0^2}$ وبما أن $E = \frac{U}{d}$ تصبح العلاقة : $D_e = -\left(L - \frac{\ell}{2}\right)\frac{qU\ell}{mdv_0^2}$ والتي تكتب على الشكل التالي : $D_e = K.U$ بحيث K هي $K = -\left(L - \frac{\ell}{2}\right)\frac{q\ell}{mdv_0^2}$

نستنتج أن الانحراف الكهرساكن يتناسب اطرادا مع التوتر المطبق بين الصفيحتين

وتستغل هذه الخاصية في مبدأ اشتغال راسم التذبذب ، حيث يتناسب الانحراف الرأسي مع التوتر المطبق على الصفيحتين الأفقيتين والانحراف الأفقي مع التوتر المطبق على الصفيحتين الرأسيتين

تمرين تطبيقي :

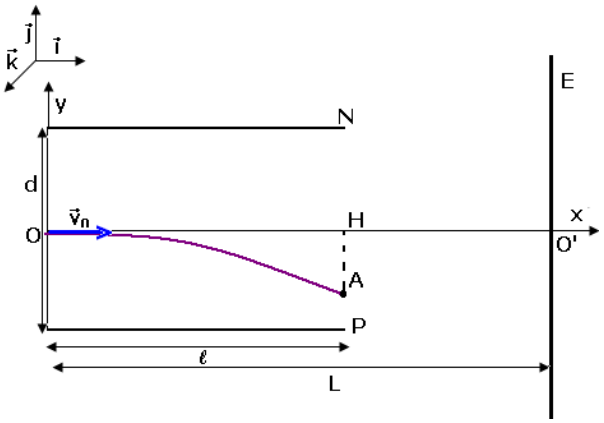
تلج إلكترون بين صفيحتين فليزيتين أفقيتين لراسم تذبذب بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ أفقية ، $v_0 = 10^7 m/s$.

التوتر بين الصفيحتين $U = V_P - V_N = 40V$ ؛ المسافة الفاصلة بين الصفيحتين $d = 4cm$ وطول كل منهما $\ell = 6cm$.

1 ـ أحسب المسافة AH التي تمثل الانتقال الرأسي للإلكترون عند مغادرتها المجال الكهرساكن $\vec{E}$

2 ـ حدد مميزات متجهة سرعة الإلكترون في النقطة A .

3 ـ أحسب قيمة الانحراف الكهربائي D_e . المسافة الفاصلة بين الشاشة المستشعة والنقطة O هي $L = 50cm$



لكي تلج الإلكترون بالسرعة البدئية $v_0 = 10^7 m/s$ ما هي قيمة توتر التسريع U' التي يجب استعماله ؟ أوجد تعبير D_e بدلالة U و U'

الأجوبة :

1 ـ $|AH| \simeq 3,2.10^{-3} m$ 2 ـ $\alpha \simeq 6°$ مع الخط الأفقي والسرعة تساوي تقريبا السرعة v_0

3 ـ $D_e \simeq 5cm$ و $U' = 282,5V$

III ـ حركة دقيقة مشحونة في مجال مغنطيسي منتظم .

1 ـ تأثير مجال مغنطيسي على حزمة من إلكترونات

تجربة : عند تقريب مغنطيس من أنبوب مفرغ نلاحظ انحراف الحزمة الإلكترونية . نفس الملاحظة عند تقريب ملف لولبي يمر فيه تيار كهربائي . يتغير منحى الانحراف عند عكس موضعي قطبي المغنطيس أو بعكس منحى التيار الكهربائي المار في الملف اللولبي .

نستنتج :

ميكانيكيا على حزمة الإلكترونات داخل النبوب المفرغ من الهواء . نقرن هذا التأثير الميكانيكي بقوة تسمى القوة المغنطيسية . ما هي مميزاتها ؟

2 ـ القوة المعنطيسية ،

2 ـ 1 علاقة لورنتز

تخضع دقيقة مشحونة ، ذات شحنة q تتحرك بسرعة متجهتها $\vec{v}$ داخل مجال مغنطيسي متجهته $\vec{B}$ إلى قوة مغنطيسية $\vec{F}$ تسمى قوة لورنتز تحددها العلاقة المتجهية التالية : $\vec{F} = q\vec{E} \wedge \vec{B}$

معرفة مميزات المتجهتين $q\vec{v}$ و $\vec{B}$ تمكن من استنتاج مميزات القوة $\vec{F}$.

خلال هذه الدراسة نهمل وزن الدقيقة المشحونة أمام القوة المغنطيسية التي تطبق عليها

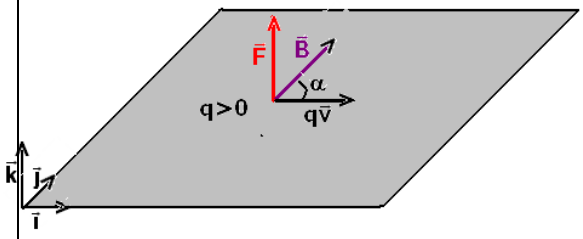
2 ـ 2 مميزات القوة المغنطيسية

مميزات قوة لورنتز هي :

ـ نقطة التأثير الدقيقة نفسها باعتبارها نقطة مادية .

ـ خط التأثير : العمودي على المستوى المحدد بواسطة $(\vec{v}, \vec{B})$ ؛ $\vec{F}$ عمودية على المتجهة $\vec{v}$ وعلى المتجهة $\vec{B}$.

ـ المنحى : هو المنحى بحيث يكون ثلاثي الوجه $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ مباشرا .



ـ الشدة : $F = |qvB\sin\alpha|$

q : شحنة الدقيقة ب (C)

v : سرعة الدقيقة ب m/s

B : شدة المجال المغنطيسي (T)

α الزاوية التي تكونها $\vec{v}$ مع $\vec{B}$

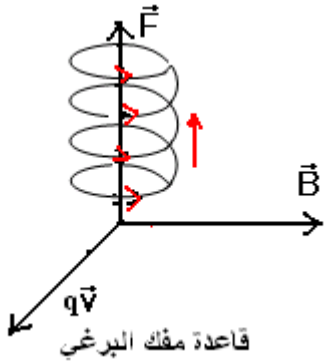
F : شدة قوة لورنتز (N)

ملحوظة :

منحى $\vec{F}$ يتغير حسب إشارة q . عمليا للحصول على منحى المتجهة $\vec{F}$ نطبق إحدى القواعد .

ـ قاعدة الأصابع الثلاث لليد اليمنى . الإبهام $q\vec{v}$. السبابة : $\vec{B}$.

الوسطى :$\vec{F}$



ـ قاعدة مفك البرغي

ـ قاعدة اليد اليمنى

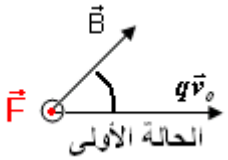
الحالات التي تنعدم فيها القوة المغناطيسية :

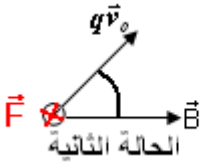
- q=0 دقيقة محايدة كهربائيا
- $\vec{v} = \vec{0}$ دقيقة متوقفة
- $\vec{B} = \vec{0}$ غياب المجال المغنطيسي
- $\alpha = 0$ أو $\alpha = \pi$ أي $\vec{v}$ و $\vec{B}$ على استقامة واحدة .

تمرين تطبيقي : **ندخل حزمة من دقائق الهيليوم** $^{2}_{4}He^{2+}$ **بسرعة** $v_0 = 10^3 m/s$ **مجالا مغناطيسيا شدته** $B = 2.10^{-3} T$ **. علما أن** $(\vec{v}_0, \vec{B})$ **تكون زاوية** $60°$ **، أحسب شدة القوة المغناطيسية التي تخضع إليها الدقائق الهيليوم . ومثل المتجهات** $\vec{B}$ **و** $\vec{v}_0$ **و** $\vec{F}$ **على تبيانة في الحالتين التاليتين :** $(\vec{v}_0, \vec{B}) = 60°$ **و** $(\vec{B}, \vec{v}_0) = 60°$

الحل : حسب علاقة لورنتز : $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ حسب المعطيات عندنا $q = +2e$ و $v_0 = 10^3 m/s$ و $B = 2.10^{-3} T$

بما أن شدة القوة $\vec{F}$ هي $F = |qvB\sin\alpha|$ فإن $F = 3,2.10^{-19} N$





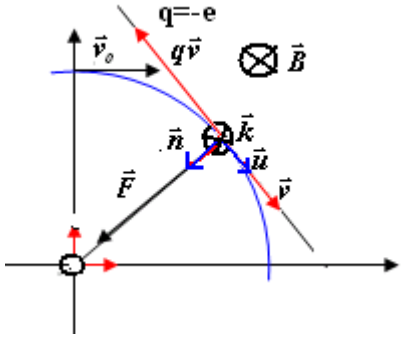
3ـ حركة دقيقة مشحونة في مجال مغناطيسي منتظم

ندرس حركة دقيقة تم نعممها على الحزمة الإلكترونية باعتبار أن جميع الدقائق مماثلة في الحركة
نعتبر دقيقة شحنتها q وكتلتها m تلج مجالا مغنطيسيا منتظما $\vec{B}$ بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ عمودية على $\vec{B}$.

أ ـ طبيعة حركة الحزمة الإلكترونية داخل المجال المغناطيسي $\vec{B}$.

ـ نبين أن مسار الإلكترون مسار مستو ي
نطبق القانون الثاني لنيوتن على الدقيقة في اللحظة t ،
نهمل وزن الدقيقة أمام الشدة القوة المغناطيسية فتصبح العلاقة المتجهية السابقة على $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$
الشكل التالي : $\vec{F} = m.\vec{a}$ وبما أن $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ إذن $q\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$ أي أن $\vec{a} = \frac{q}{m}\left(\vec{v}_0 \wedge \vec{B}\right)$
في معلم فريني الذي تم اختياره في الشكل $M\left(\vec{u},\vec{n},\vec{k}\right)$ أن $\vec{a}(0,a_n,0)$ يعني أن $a_z = 0$ ومنه $z = g(t) = 0$ مما يبين أن حركة الدقيقة تتم في المستوى $(\vec{u},\vec{n})$ وبالتالي فحركة الدقيقة حركة مستوية .

ب ـ ما هو شكل المسار ؟



حسب التحليل السابق وفي معلم فريني $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ أي أن

$$v = cte = v_0$$

وكذلك $a_n = \frac{v_0^2}{\rho_n}$ ونعلم أنه في معلم فريني $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \vec{a}_n$

إذن $a = a_n \Rightarrow \frac{q}{m}v_0 B = \frac{v_0^2}{\rho}$ نستنتج أن $\rho = \frac{m.v_0}{|q|.B} = Cte = R$

إذن مسار الدقيقة هو مسار دائري .

ج ـ خلاصة

حركة دقيقة ذات شحنة q وكتلة m عند ولوجها مجالا مغناطيسيا منتظما $\vec{B}$ بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ متعامدة مع $\vec{B}$ ، حركة دائرية منتظمة .

ـ مسارها ينتمي إلى المستوى العمودي على المجال .

ـ شعاعها يساوي : $R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$ **(1)**

د ـ الدراسة الطاقية

*** قدرة القوة المغناطيسية**

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} \Leftrightarrow \mathcal{P} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} = 0$$

قدرة القوة المغناطيسية دائما منعدمة لكون أن هذه القوة دائما عمودية على السرعة
نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الدقيقة عند انتقالها خلال مدة زمنية Δt :

$\Delta E_C = W(\vec{F}) = 0$ أي أن $E_C = Cte$ إذن $\frac{1}{2}mv^2 = Cte \Rightarrow v = cte = v_0$

خلاصة : المجال المغناطيسي لا يغير الطاقة الحركية لدقيقة مشحونة .

4 : الإنحراف المغناطيسي

تعريف : نسمي الانحراف المغناطيسي المسافة $\overline{O'P} = D_m$

تلج حزمة دقائق من النقطة O وبسرعة $\vec{v}_0$ حيزا طوله ℓ حيث يخضع لمجال مغناطيسي منتظم ☐ متعامد مع متجهة السرعة البدئية .

مسار كل دقيقة في المجال المغناطيسي هو عبارة عن قوس من دائرة مركزها C وشعاعها $R = \frac{mv_0}{|q|.B}$

.

عند النقطة S تغادر الدقيقة المجال المغناطيسي بسرعة $\vec{v}_0$ بحيث تصبح حركتها مستقيمية منتظمة (مبدأ القصور)

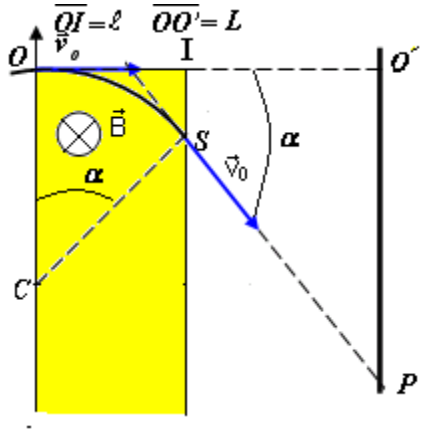
الزاوية $\alpha = (OC, OS)$ تسمى بالانحراف الزاوي بحيث أن $\sin\alpha = \frac{\ell}{R}$ وكذلك

$$\tan\alpha = \frac{\overline{O'P}}{\overline{OO'} - \overline{OI}} = \frac{D_m}{L - \overline{OI}}$$

وبما أن في الأجهزة المستعملة α صغيرة جدا وكذلك ($\ell << L$)

($\sin\alpha = \tan\alpha$)

$D_m = \frac{|q|.B.L.\ell}{m.v_0}$ أي أن $\frac{\ell}{R} = \frac{D_m}{L}$



ملحوظة : المقارنة بين الانحراف الكهربائي والانحراف المغناطيسي

$D_m = \frac{|q|.B.L.\ell}{m.v_0}$ و $D_e = \frac{|q|E.L.\ell}{m.v_0^2}$

يلاحظ أن ألانحراف المغناطيسي أكثر تكيفا من الانحراف الكهربائي لأنه يتناسب اطرادا مع $\frac{1}{v_0}$. لهذا يستعمل في أنبوب التلفاز .

VI تطبيقات :

1 ـ السيكلوترون

السكلوترون جهاز مسرع الدقائق ، يتكون سيكلوترون من علبتين موصليتين D_1 و D_2 على شكل نصف أسطوانتين مفرغتين تفصل بينهما مسافة جد صغيرة أمام شعاعهما .

يوجد داخل كل علبة مجال مغنطيسي منتظم $\vec{B}$ شدته B =0.14T .

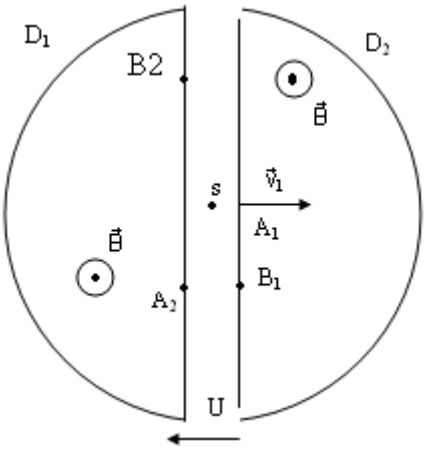
1 ـ نطبق بين العلبتين توترا U تابثا وموجبا . تنطلق حزمة من البروتونات من المنبع S ، فيتم تسرعها نحو العلبة D_1 ، حيث تكون سرعة كل بروتون عند وصوله النقطة A هي : $v_1 = 4.38.10^5 m/s$

1 ـ 2 بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد قيمة R_1 ، شعاع المسار الدائري للبروتون داخل D_1 .

1 ـ 2 أوجد قيمة الدور T لحركة البروتون . بين أن T لا ترتبط بسرعة البروتون ولا بشعاع مساره .

2 ـ يصل البروتون إلى B_1 في اللحظة التي تتغير عندها إشارة التوتر U ، فيتسرع البروتون ، من جديد ، نحو العلبة D_2

2 ـ 1 بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية ، أوجد السرعة v_2 للبروتون عند النقطة A_2 ، علما أن U =-2kV قارن v_1 و v_2 .



2 ــ2 ليكن R_2 شعاع مسار البروتون داخل العلبة D_2 برهن على أن $R_2>R_1$.

2 ــ 3 عند وصول البروتون إلى النقطة B_2 ، تتغير إشارة التوتر من جديد . صف حركة البروتون بعد وصوله إلى B_2 . استنتج وظيفة السيكلوترون ، إذا علمت أن إشارة U تتغير دوريا .

نعطي كتلة البروتون $m=1.67.10^{-27}kg$

شحنة البروتون $e = 1.6.10^{-19}C$

2 ــ راسم طيف الكتلة

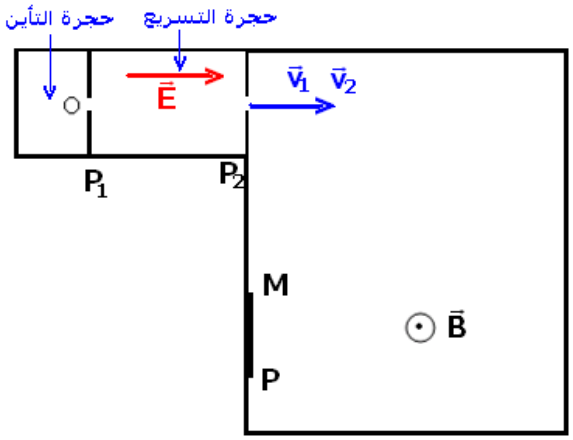
راسم طيف الكتلة جهاز يمكن من فرز أيونات ذات كتل أو شحن مختلفة ، وذلك باستعمال مجال كهرساكن ومجال مغنطيسي .

يتكون راسم الطيف للكتلة من نوع دمبستر (Dempster) من :

حجرة التأين حيث تنتج الأيونات ؛

حجرة التسريع حيث تدخل الأيونات بسرعة تكاد تكون منعدمة لتسرع $\vec{E}$ محدث بواسطة توتر U .

نريد فرز الأيونات $^4_2He^{2+}$,$^3_2He^{2+}$ كتلتاهما إتباعا $m_3= 5.10^{-27}kg$ و $m_4=6.7.10^{-27}$ ندخل الأيونات في مجال كهرساكن منتظم محدث بواسطة توتر U مطبق بين صفيحتين رأسيتين P_1 و P_2 لتسريعهما إلى النقطة A .



1 ــ تخرج الأيونات $^4_2He^{2+}$,$^3_2He^{2+}$ من النقطة A على التتابع بالسرعتين $\vec{v}_1$ و$\vec{v}_2$ نهمل السرعتين عند النقطة O . عبر عن السرعتين v_1 و v_2 بدلالة معطيات النص . أحسب v_1 وv_2 .

2 ــ تدخل الأيونات ، عند النقطة A ، مجالا مغناطيسيا منتظما $\vec{B}$ عموديا على متجهتي السرعتين $\vec{v}_1$ و$\vec{v}_2$ وتصل إلى منطقة الإستقبال MP المعينة على الشكل .

احسب المسافة MP الفاصلة بين P و M نقطتي وقع الأيونات $^4_2He^{2+}$,$^3_2He^{2+}$ على منطقة استقبال . نعطي U $=10^4V$ و $B=0.5T$

الحركات المستوية تمارين

تمرين 1

نعتبر صفيحتين فليزيتين رأسيتين ومتوازيتين تفصل بينهما المسافة $d=10cm$. نحدث بين الصفيحتين توترا كهربائيا مستمرا $U_{AB}=V_A-V_B=2.10^4V$ فيعم مجالا كهرساكنا منتظما بين الصفيحتين .

1 ـ أعط مميزات متجهة المجال الكهرساكن $\vec{E}$ مثله على التبيانة مع خطوط المجال .

2 ـ ندخل أيونات الكبريتور S^{2-} من النقطة O بسرعة متجهتها $\vec{v}_0$ متعامدة مع الصفيحة A وقيمتها $v_0=4,5.10^5 m/s$.

2 ـ 1 أوجد في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المعادلات الزمنية لحركة أيون الكبريتور .

2 ـ 2 ما طبيعة حركتها ؟

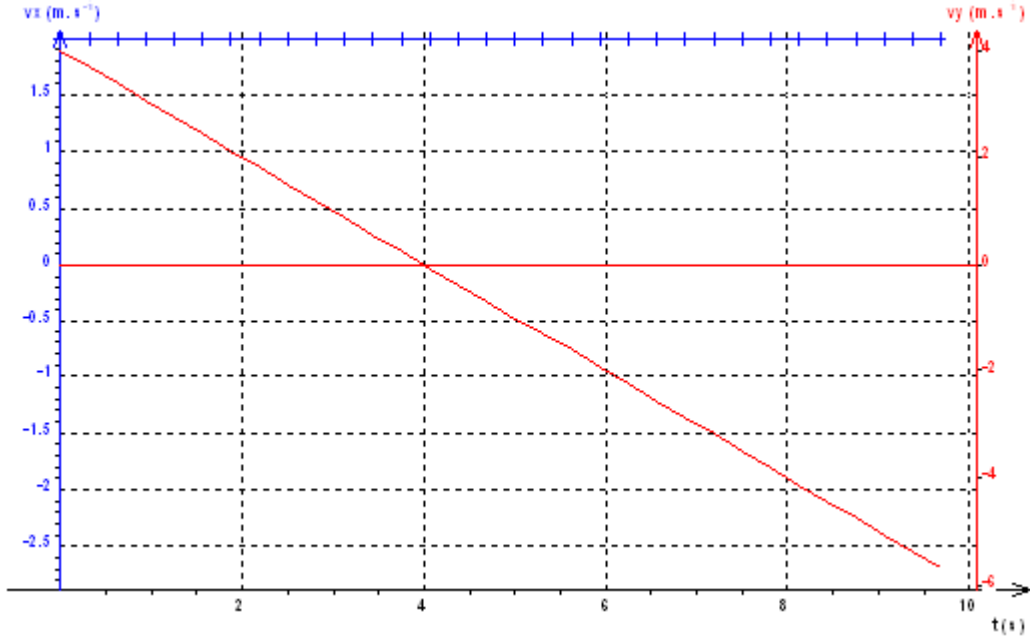
2 ـ 3 ما هي المسافة التي سيقطعها الأيون لكي يغير منحى حركته ؟

2 ـ 4 بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد تعبير السرعة v' لأيون البريتور عند مروره من النقطة O مرة ثانية . أحسب هذه السرعة . نعطي : $e=1,6.10^{-19}C$ وكتلة الأيون

$$M\left(S^{2-}\right)=5,23.10^{-26}kg$$

تمرين 2

نعطي في الشكل اسفله منحنيي الإحداثيتين v_x و v_y لمتجهة السرعة لمركز القصور G لقذيفة في معلم مرتبط بمرجع أرضي ، تم التوصل إليهما من خلال دراسة تجريبية



1 ـ هل تتغير الإحداثية الأفقية v_x بدلالة الزمن ؟ ما قيمتها ؟

2 ـ استنتج الإحداثية الأفقية a_x لمتجهة التسارع $\vec{a}_G$ لمركز قصور G للقذيفة .

3 ـ عبر عن الإحداثية الرأسية v_y بدلالة الزمن .

4 ـ ما قيمة v_{0y} إحداثية متجهة السرعة البدئية $\vec{v}_0$ للنقطة G ؟

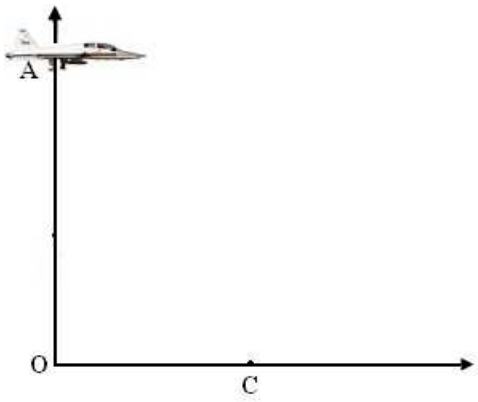
5 ـ حدد قيمة a_y إحداثية $\vec{a}_G$ متجهة التسارع للنقطة G . لماذا تكون قيمة a_y سالبة ؟

6 ـ أحسب زاوية القذف α التي تكونها $\vec{v}_0$ مع المحور الأفقي $(O,\vec{i})$. ما قيمة v_0 ؟

تمرين3

1 ـ خلال مناورة حربية تتحرك طائرة حربية على خط مستقيم في مستوى رأسي $H = 7840m$ من سطح الأرض بسرعة ثابتة $V_0 = 450km/h$.

عند اللحظة $t_A = 0$ ، ومن نقطة A التي توجد على نفس الخط الرأسي المار من O ، تسقط قديفة B كتلتها $m_B = 10kg$ لتفجير هدف C يوجد على سطح الأرض ويبعد من النقطة O بالمسافة OC (أنظر الشكل)



1 ـ 1 ما هي طبيعة حركة الطائرة ؟ وعبر عن قيمة السرعة V_0 ب m/s .

1 ـ 2 ما هي المدة الزمنية التي ستستغرقها القذيفة من أجل إصابة الهدف C ؟

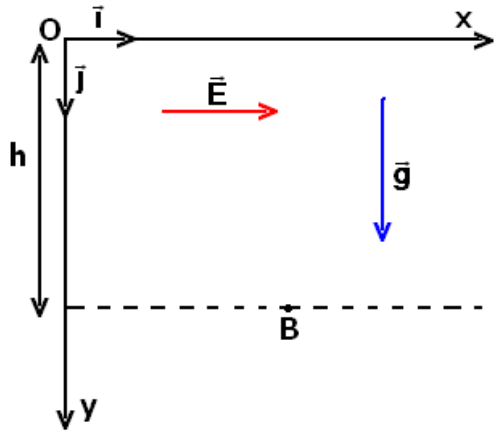
1ـ 3 ما هي المسافة التي قطعتها الطائرة انطلاقا من النقطة A ؟ استنتج قيمة المسافة OC .

2 ـ نفترض أن الطائرة تتحرك على ارتفاع $H_2 = 1960m$ من سطح الأرض .

محيط دائرة شعاعها $R = 200m$ من النقطة O ؟ هل هذه السرعة محتملة ؟

3 ـ نفترض أن سرعة الطائرة في هذه الحالة $V_0' = 360km/h$. على أي ارتفاع H_3 من سطح الأرض بإمكان الطائرة إسقاط القذيفة وهي في طيران انقضاضي (vol piqué) حيث تكون مع الخط الرأسي زاوية 9° لكي تصيب القذيفة هدفا يوجد على محيط دائرة شعاعها أصغر من $156m$؟

خلال هذه الدراسة نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g = 9,8m/s$. (بكالوريا فرنسية)



تمرين 4

نعتبر جسما نقطيا (S) كتلته m=5g ويحمل شحنة كهربائية q . نطلق الجسم (S) من نقطة O بدون سرعة بدئية في حيز من الفضاء حيث يعم مجالا كهرساكن منتظم $\vec{E}$ بالإضافة إلى مجال الثقالة $\vec{g}$.

عندما يقطع الجسم الارتفاع h يمر من نقطة B (أنظر الشكل)

1 ـ ما هي إشارة شحنة الجسم (S)

2 ـ قارن شدة وزن (S) وشدة القوة الكهربائية $\vec{F}$ المطبقة عليه . ماذا تستنتج ؟

3 ـ بين أن المجموع القوى المطبقة على الجسم (S) ثابت . واستنتج طبيعة حركة (S) .

4 ـ أوجد معادلة مسار حركة (S) في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$. ما هي طبيعته ؟

5 ـ أوجد التعبير الحرفي لإحداثيتي النقطة B . واحسب قيمتها .

نعطي : $g = 10m/s^2, h = 0,5m, |q| = 4.10^{-7}C, E = 10^4V/m$

تمرين 5

نعتبر وزن الإلكترون مهملا بالنسبة للقوى الأخرى .

يتكون مدفع إلكترونات من سليك وصفيحة P بها ثقيب . السليك يبعد عن الصفيحة P بمسافة $d = 3cm$ يبعث السليك الساخن إلكترونات بدون سرعة بدئية فتخضع إلى فرق الجهد $V_P - V_N = 300V$

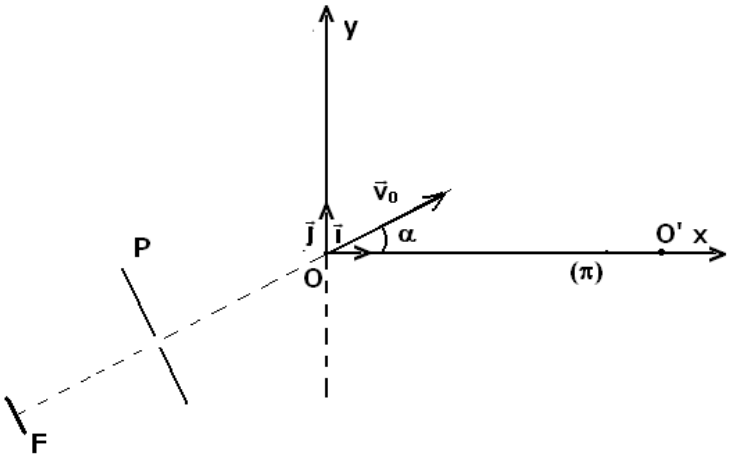
1 ـ عين مميزات المتجهة $\vec{E}$ للمجال الكهرساكن المنتظم الموجود بين F و P .

2 ـ 2 ـ 1 أحسب السرعة v للإلكترونات عند وصولها إلى P .

2 ـ 2 احسب تسارع الإلكترونات بين F و P .

2 ـ 3 أحسب المدة الزمنية التي يستغرقها مرور الإلكترون من F إلى P .

3 ـ حركة الإلكترون من P إلى O حركة مستقيمية منتظمة ، وعند وصول الإلكترونات إلى O ، تدخل حيزا يوجد به مجالا مغنطيسي منتظم متجهته $\vec{B}$ عمودية على المستوى π الذي نقرن به المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. وهكذا فالإلكترونات التي تدخل المجال المغنطيسي بسرعة v_0 ، متجهتها $\vec{v}_0$ مائلة بزاوية α بالنسبة للمحور OO' قتلتقي بهذا المحور من جديد في النقطة O′ . نعطي $OO'=5cm$



3 ـ 1 ما مسار الإلكترونات بين O و O′ ؟

2 ـ حدد توجيه المتجهة $\vec{B}$ للمجال المغنطيسي .

أحسب شعاع المسار واستنتج شدة المجال المغنطيسي .

نعطي شحنة الإلكترون : $e=1,6.10^{-19}C$

وكتلة الإلكترون : $m=9.10^{-31}kg$

تمرين 6

نتوفر على جهاز يمكن من إنتاج أيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ و أيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ في الفراغ .

تغادر هذه الأيونات النقطة C بسرعة بدئية مهملة . ثم تسرع بين الصفيحتين P_1 و P_2 تحت تأثير توتر U فتدخل في مجال مغنطيسي $\vec{B}$ منتظم حيزه محدود في مسافة طولها $\ell=2cm$ ، متجهته عمودية على الشكل وشدته $B=6.10^{2}T$

1 ـ ما إشارة التوتر U لكي تتجاوز الأيونات الثقب T ؟ علل جوابك .

2 ـ 2 ـ 1 أوجد تعبير السرعة v_1 لأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ عند مرورها عبر الثقب T بدلالة كتلتها m_1 وشحنتها q و التوتر U . أحسب v_1 .

نعطي : الشحنة الابتدائية : $e=1,6.10^{-19}C$

كتلة البروتون m_p تساوي تقريبا كتلة النوترون m_n .

$$m_p \simeq m_n = 1,67.10^{-27}kg$$

التوتر الكهربائي $U=100V$

2 ـ 2 اشرح لماذا تصل الأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ إلى الثقب T' بنفس السرعة v_1 المحصل عليه عند الثقب T .

3 ـ 1 ما طبيعة حركة الأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ في الحيز الذي يوجد فيه المجال $\vec{B}$ ؟ علل جوابك

3 ـ 2 أوجد تعبير الشعاع R_1 لمنحنى مسار أيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ بدلالة B و e و m_1 و U . أحسب R_1 .

3 ـ 3 أحسب زاوية الانحراف α_1 لأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$.

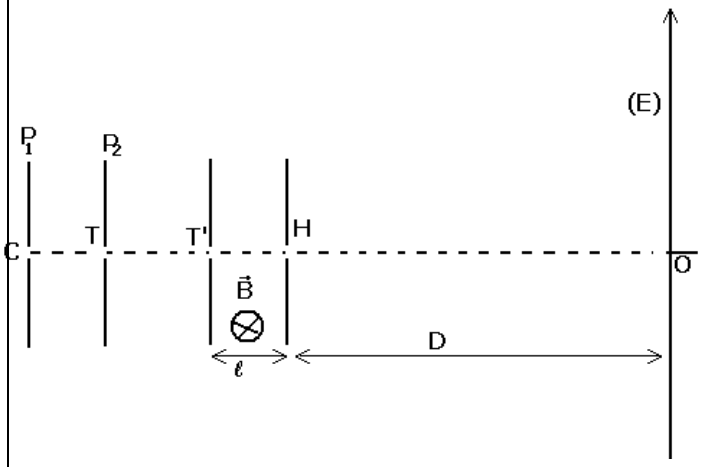
3 ـ 4 أحسب الأرتوب y_1 لنقطة الإصطدام على الشاشة (E) لأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$.

نعطي : $D=5cm$

4 ـ في الحقيقة هناك مساران متباينان . لتكن m_2 كتلة الأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ و R_2 شعاع مسارها .

$(^{6}_{3}Li^{+},\ ^{A}_{3}Li^{+})$ نظيران لهما نفس الشحنة q وكتلتهما مختلفتان $(m_1 \neq m_2)$.

4 ـ 1 بين بأن العلاقة $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ لا تتعلق إلا بالكتلتين m_1 و m_2 حيث تمثل α_2 زاوية الانحراف لأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$.



4 ـ 2 أحسب عدد الكتلة A لأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ علما أن $\alpha_2 = 18°27'$

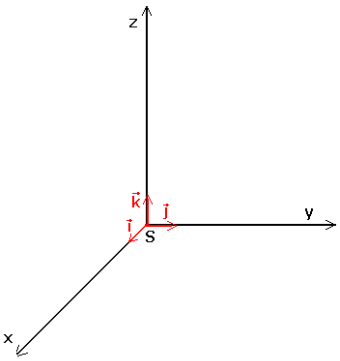
5 ـ نحدث مجالا كهرساكنا $\vec{E}$ منتظما ورأسيا في الحيز المحدث فيه $\vec{B}$ بواسطة صفيحتين M و N متوازيتان وأفقيتان مطبق بينهما توتر U_{MN} .

بين أنه بالنسبة لقيمة معينة للتوتر U_{MN} يمكن التقاط أيونات عند النقطة O على الشاشة (E) .

لتكن $U_1 = 120V$ قيمة التوتر U_{MN} التي تمكن من التقاط أيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ عند النقطة O .

ما القيمة U_2 للتوتر U_{MN} التي تمكن من التقاط أيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ عند النقطة O ؟

حركة الأقمار الاصطناعية والكواكب
خاص بالعلوم الرياضية والعلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية



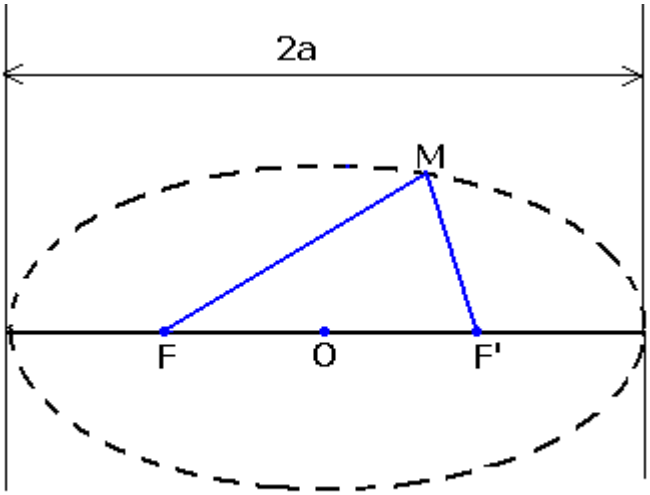
I ـ القوانين الثلاثة لكيبلر Kepler
1 ـ المرجع المركزي الشمسي
المرجع الغاليلي الملائم لدراسة حركة الكواكب حول الشمس هو المرجع المركزي الشمسي .

لدراسة حركة الكواكب حول الشمس نربط معلم متعامد وممنظم $(S,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بالمرجع المركزي الشمسي حيث مركزه الشمس ومحاوره الثلاثة موجهة نحو ثلاثة نجوم بعيدة جدا نعتبرها ثابتة .

2 ـ قوانين كيبلر :
أ ـ القانون الأول أو قانون المدارات الإهليجية .

يحدد هذا القانون بدقة طبيعة مسارات مراكز قصور الكواكب .

نص القانون : مسار مركز قصور كوكب ، في المرجع المركزي الأرضي ، إهليلج يشكل مركز الشمس إحدى بؤرتيه .



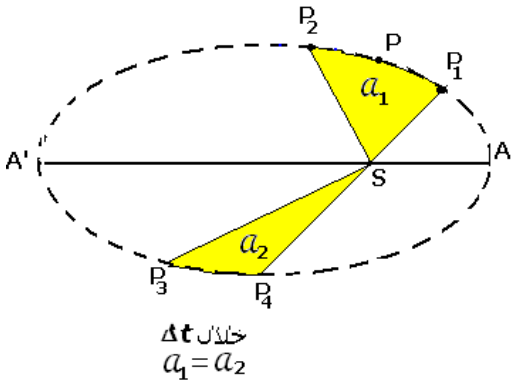
MF+MF'=2a

الإهليلج منحنى مستو ، حيث يكون مجموع المسافتين اللتين تفصلان نقطة ما من هذا المنحنى ، تباعا ، بنقطتين ثابتتين ، مجموعا ثابتا . تشكل النقطتان F و F' بؤرتي الإهليلج .

لتكن النقطة M من الإهليلج لدينا : $MF+MF'=Cte=2a$

a نصف طول المحور الكبير للإهليلج .

مثال : مدار الأرض حول الشمس هو عبارة عن إهليلج ، يسمى فلك البروج l'éliptique بحيث ينتمي مركز الشمس إلى مستوى هذا المدار .



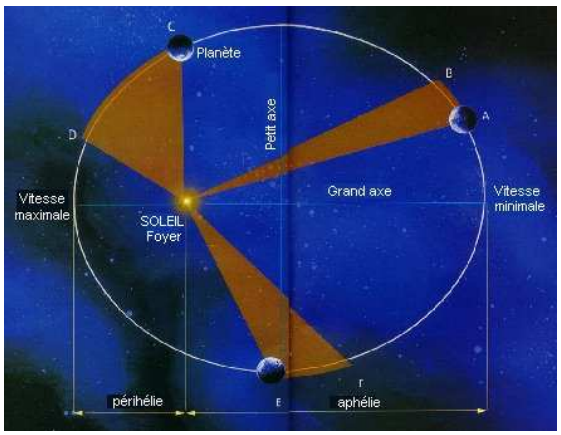
ب ـ القانون الثاني أو قانون المساحات .

نعتبر كوكبا مركز قصوره P في حركة حول الشمس . خلال المدة الزمنية $\Delta t=t_2-t_1$ ينتقل P من الموضع P_1 إلى الموضع P_2 . أي أن خلال هذا الانتقال تم كسح مساحة a_1 وهي المحصورة بين $[SP_1]$ و $[SP_2]$ والمقطع P_1P_2 لمسار P .

خلال نفس المدة الزمنية $\Delta t=t_4-t_3$ ينتقل P من P_3 إلى P_4

أي أنه خلال هذا الانتقال تم كسح المساحة $\mathcal{A}_2$ حيث $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

نص القانون : تكسح القطعة $[SP]$ التي تربط مركز الشمس بمركز الكوكب مساحات متقايسة في مدد زمنية متساوية .



يترجم هذا القانون ملاحظة كيبلر والتي تؤكد أن الكواكب تدور حول الشمس بسرعة غير ثابتة ؛ أي أن الكوب كلما اقترب من الشمس زادت سرعته والعكس صحيح .

تكون سرعة الكوكب قصوى عندما يتواجد مركز قصوره بالنقطة A الأقرب من مركز الشمس ؛

وتكون سرعة الكوكب دنيا عندما يتواجد مركز قصوره بالنقطة A' الأبعد من مركز الشمس .

ج ـ القانون الثالث أو قانون الأدوار ؛

الدورة الفلكية : هي حركة كوكب ما بين مرورين متتاليين لمركزه P من نفس النقطة من مداره حول الشمس .

الدور المداري T للكوكب هو المدة الزمنية التي يستغرقها مرزه لإنجاز دورة فلكية كاملة .

نص القانون : يتناسب مربع الدور المداري اطرادا مع مكعب نصف طول المحور الكبير للإهليلج .

ونعبر عن هذا النص بالعلاقة التالية : $\frac{T^2}{a^3} = k$

حيث أن T الدور المداري ب (s)

a نصف طول المحور الكبير للإهليلج بالمتر (m) ؛

K ثابتة لا تتعلق بالكوكب ، وحدتها m^2 / s^3

قيمة k هي نفسها بالنسبة لجميع كواكب النظام الشمسي .

ملحوظات : بالنسبة للكواكب التي يمكن اعتبار أن مداراتها دائرية شعاعها r

يكتب القانون الثالث لكيبلر : $\frac{T^2}{r^3} = k$

نطبق قانون كيبلر أيضا على الأقمار الاصطناعية التي تدور حول كوكب ما . في هذه الحالة يشكل مركز الكوكب إحدى بؤرتي الإهليلج ، كما أنه بالنسبة لخارج القسمة $\frac{T^2}{a^3} = k'$ هو نفسه بالنسبة لجميع الأقمار التي تدور حول نفس الكوكب . تتعلق قيمة k' بكتلة الكوكب .

II ـ الحركة الدائرية المنتظمة

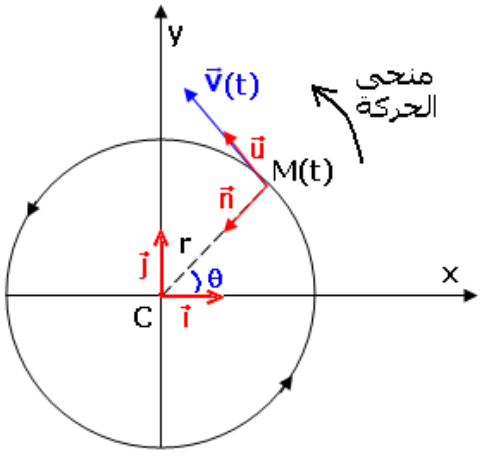
سنقتصر في دراسة حركة الأقمار والكواكب على حالة واحدة حيث يكون المدار دائريا

تطبيق قوانين كيبلر الخاصيات لتالية :

ـ مدار الكوكب دائري مركزه الشمس

ـ سرعة P مركز الكوكب ثابتة أي أن الحركة دائرية منتظمة

ـ قانون الأدوار يصبح هو : $\frac{T^2}{r^3} = k$ ، r هو شعاع المسار الدائري .



1 ـ خاصيات الحركة الدائرية المنتظمة

أ ـ تعريف

تكون حركة نقطة دائرية منتظمة إذا كان مسار هذه النقطة دائريا وإذا كانت قيمة سرعتها ثابتة .

ب ـ متجهة السرعة

نعتبر نقطة M في حركة دائرية منتظمة في معلم معين . مسار M

دائري مركزه C ، وشعاعه r ، موجه موجبا في منحى الحركة . نمعلم موضع M في المستوى $(C,\vec{i},\vec{j})$ بالزاوية θ هو الأفصول الزاوي .

خاصية حركة دائرية منتظمة :

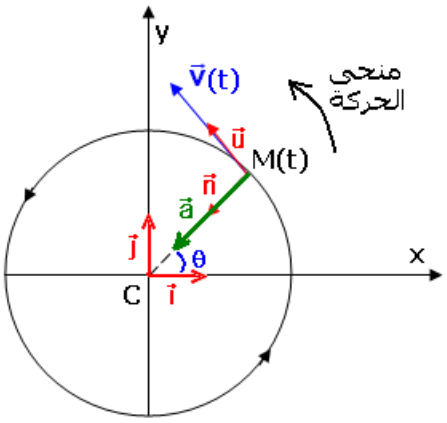
ـ السرعة الزاوية ثابتة : $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = cte$

ـ متجهة السرعة $\vec{v}$ مماسة للمسار الدائري ، ومنحاها هو منحى الحركة : $\vec{v} = r.\omega\vec{u}$ ؛ $\vec{u}$ متجهة واحدية مماسية للمسار.

ـ دور الحركة هو مدة دورة كاملة : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$.

وحدة الفصول الزاوي هي الراديان rad ووحدة السرعة الزاوية ω هي rad/s

ج ـ متجهة التسارع



في الحركة الدائرية المنتظمة يتغير اتجاه متجهة السرعة ، باعتبار أساس فريني فإن $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$ ونعلم أنه بالنسبة للحركة الدائرية المنتظمة $v = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$ أي أن $\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$

وبالتالي فإن متجهة التسارع غير منعدمة ومحمولة من طرف المتجهة المنظمية $\vec{n}$ أي موجه نحو مركز الدائرة .

بالنسبة لحركة دائرية منتظمة ، متجهة التسارع مركزية انجذابية ، تعبيرها هو :

$\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$ **وبما أن** $v = r.\omega$ **فإن** $\vec{a} = r\omega^2\vec{n}$

ω السرعة الزاوية نعبر عنها ب rad/s و r شعاع المسار الدائري ونعبر عنه بالمتر ، v قيمة السرعة ونعبر عنها ب m/s و a قيمة التسارع ونعبر عنها ب m/s^2 و $\vec{n}$ المتجهة الواحدية المنظمية موجهة نحو المركز C .

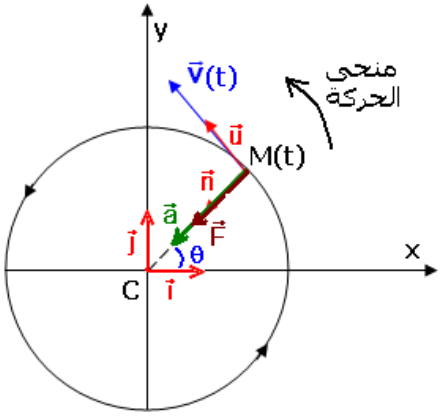
2 ـ الشرطان الأساسيان للحصول على حركة دائرية منتظمة .

نعتبر جسما صلبا كتلته m ، وحركة مركز قصوره دائرية منتظمة في معلم غاليلي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على حركة هذا الجسم : $\sum \vec{F}_{ex} = m.\vec{a}_G$

بحيث أن $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}$ مجموع القوى المطبقة على الجسم الصلب .

للحصول على حركة دائرية منتظمة يجب أن تكون متجهة التسارع $\vec{a}_G$ لمركز قصور الجسم انجذابية مركزية منظمها ثابت ومنظمها يساوي :



وبالتالي يجب **أن تكون** $a = \frac{v^2}{r}$ **كذلك مركزية انجذابية** $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}$

ومنظمها $F = \frac{mv^2}{r}$.

III ـ قانون نيوتن للتجاذب الكوني

نص القانون :

يحدث بين جسمين نقطيين (A) و (B) كتلتهما m_A و m_B ، وتفصل بينهما مسافة AB ، تجاذب كوني قوتاه هما $\vec{F}_{A/B}$ و $\vec{F}_{B/A}$ بحيث أن :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -\frac{G.m_A.m_B}{AB^2}\vec{u}_{AB}$$

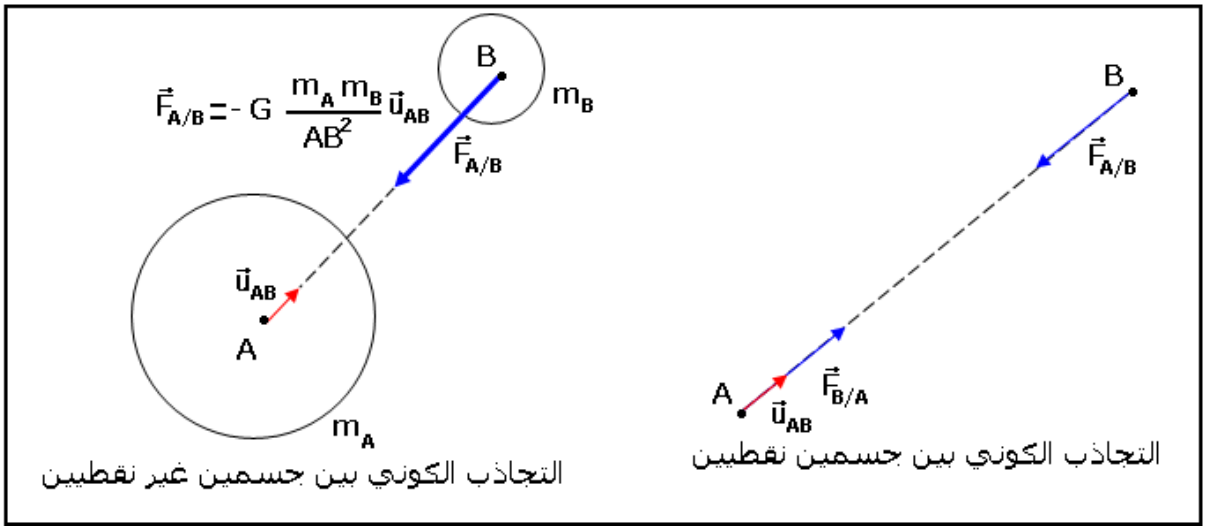
G : **ثابتة التجاذب الكوني :** $G = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

$\vec{u}_{AB}$ **متجهة واحدية موجهة من A نحو B .**

يطبق هذا القانون كذلك على الأجسام غير نقطية في الحالتين التاليتين :

ـ أجسام ذات تماثل كروي لتوزيع الكتلة .

ـ أجسام لها أبعاد مهملة أمام المسافة الفاصلة بينهما .

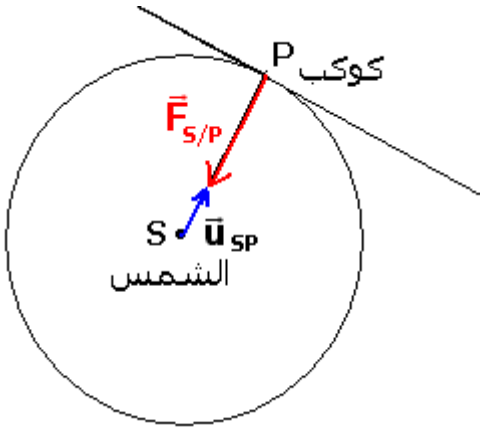


IV ـ الحركة المدارية للكواكب

نختار كمرجع لدراسة حركة كوكب حول الشمس المرجع المركزي الشمسي . ونبين أن حركة هذا الكوكب حول الشمس حركة منتظمة ونحدد مميزات هذه الحركة .

1 ـ تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

نعتبر كوكبا كتلته m ومركزه P الذي يتطابق مع مركز قصوره في حركة حول الشمس ذات كتلة m_S ومركزها S .



يخضع الكوكب إلى قوة التجاذب الكوني : $\vec{F}_{S/P} = -G\frac{m.m_S}{r^2}\vec{u}_{SP}$

وحسب القانون الثاني لنيوتن لدينا : $\vec{F}_{S/P} = -G\frac{m.m_S}{r^2}\vec{u}_{SP} = m.\vec{a}_p \Rightarrow \vec{a}_p = -G\frac{m_S}{r^2}\vec{u}_{SP}$

يلاحظ من خلال العلاقة أن $\vec{a}_p$ و $\vec{u}_{SP}$ لهما نفس الاتجاه يعني أن التسارع انجذابي مركزي وبالتالي فإن حركة الكوكب P حركة دائرية منتظمة .

وبما أن قوة التجاذب الكوني قوة انجذابية مركزية فإن :

$\vec{F}_{S/P} = -m.\frac{v^2}{r}\vec{u}_{SP} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = G\frac{m_S}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.m_S}{r}}$ وبالتالي يتحقق الشرط الثاني .

في مرجع مركزي أرضي تكون حركة كوكب حول الشمس

r ، بشرط أن تحقق سرعته العلاقة : $v = \sqrt{\frac{G.m_S}{r}}$

2 ـ تعبير الدور المداري T ؛

الدور المداري T

لدينا $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.m_S}}$ من هذه العلاقة نحصل على القانون الثالث لكيبلر : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_S}$

وبالتالي $\frac{T^2}{r^3}$ لا تتعلق بكتلة الكوكب المدروس .

V ـ الحركة المدارية للأقمار الاصطناعية للأرض .

لدراسة أقمار الأرض نختار كجسم مرجعي **المرجع المركزي الأرضي**

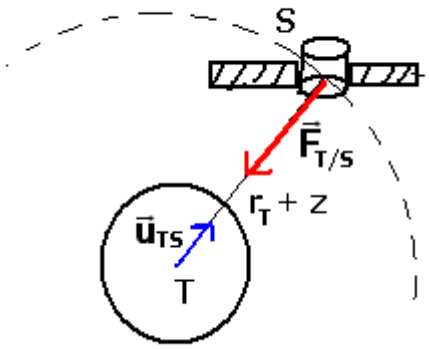
نسمي قمرا كل جسم في حركة مدارية حول كوكب .

مثال : يشكل القمر (la lune) قمرا طبيعيا للأرض .

1 ـ تعبيرا السرعة والدور المداري .

تكون حركة قمر اصطناعي حول الأرض حركة دائرية منتظمة عندما يتحقق الشرطان

ـ القوة المطبقة من طرف الأرض T ذات الكتلة m_T والشعاع r_T



على القمر الاصطناعي S $\left(\vec{F}_{T/S}\right)$ انجذابية مركزية .

ـ منظمها $F_{T/S}$ ثابت ، ويحقق العلاقة $F_{T/S} = \frac{mv^2}{r}$ أي أن

التسارع $a = \frac{v^2}{r}$

وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن :يوجد القمر الاصطناعي تحت تأثير القوة $\left(\vec{F}_{T/S}\right)$ القوة المطبقة من طرف الأرض على القمر الاصطناعي :

$$\vec{F}_{T/S} = -G\frac{m_T.m_S}{r^2}\vec{u}_{TS} = -\frac{m_S v^2}{r}\vec{u}_{TS}$$

$$v^2 = \frac{Gm_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

بحيث أن $r = r_T + z$ و z هو ارتفاع القمر اصطناعي بالنسبة للأرض و r_T شعاع الأرض .

الدور المداري T لحركة القمر اصطناعي هو : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.m_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(r_T+z)^3}{G.m_T}}$

ملحوظة : لاتتعلق v سرعة دوران القمر الاصطناعي والدور المداري T بكتلة القمر الاصطناعي بل تتعلق بارتفاعه z بالنسبة لسطح الأرض .

2 ـ الاستقمار *satellisation*

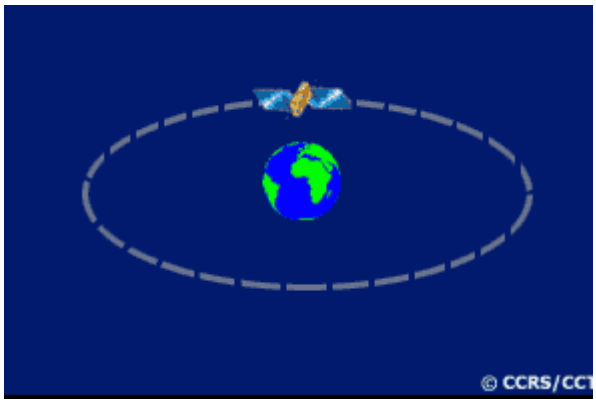
تعريف :

الاستقمار هو وضع قمر اصطناعي في مداره حول الأرض وإعطاؤه سرعة كافية تخول له حركة دائرية منتظمة حول الأرض .

تتم هذه العملية بواسطة مركبة فضائية والتي تقوم بدور مزدوج :

ـ حمل القمر الاصطناعي إلى ارتفاع يفوق حوالي 200km حيث الغلاف الجوي الأرضي تقريبا منعدم .

ـ منح القمر الاصطناعي سرعة تجعله يبقى في مدار دائري حول الأرض بحيث تكون متجهة السرعة البدئية عمودية على متجهة الموضع $\overrightarrow{TS}$ ومنظمها يحقق



العلاقة : $v=\sqrt{\frac{G.m_T}{(r_T+z)}}$

نعتبر أن القمر الاصطناعي خاضعا لقوة التجاذب الأرضي فقط ونهمل الاحتكاكات المتعلقة بالجو .

3 ـ الأقمار الاصطناعية الساكنة بالنسبة للأرض .

يكون القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض إذا بدا دوما غير متحرك بالنسبة لملاحظ على سطح الأرض .

الشروط لكي يكون القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض :

في المرجع المركزي الأرضي ، تدور الأرض حول محورها القطبي ، ويساوي الدور T لهذا الدوران الخاص يوما فلكيا (24 ساعة)

لكي يظهر القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب :

ـ أن يدور في منحى دوران الأرض حول محور قطبيها .

ـ يساوي دوره المداري T دور حركة الدوران الخاصة للأرض حول محورها القطبي .

ـ يوجد مداره الدائري في مستوى خط الاستواء للأرض .

تمكن قيمة T من تحديد قيمة z ، أي أن $T=23h56\,min=84164s$ أي أن الارتفاع z عن سطح الأرض هو :

$$T=\sqrt{\frac{(r+z)^3}{G.m_T}}\Rightarrow z=\left(\frac{T^2.G.m_T}{4\pi^2}\right)-r_T$$

تطبيق عددي :

$z\simeq 36000km$

حركة الأقمار الاصطناعية والكواكب
تمارين

تمرين 1

ينجز قمر اصطناعي (S) حركة دائرية منتظمة حول كوكب (P) ، شعاع المسار الدائري $R_S = 6,7.10^5 km$. الدور المداري $T_S = 3j13h14min$. نعتبر جميع الأجسام لها تماثل كروي لتوزيع الكتلة .

1 ـ أحسب السرعة v للقمر الاصطناعي .

2 ـ عبر عن سرعته بدلالة G و R_S وكتلة الكوكب P ، M_P

3 ـ استنتج كتلة الكوكب وتعرف عليه إن أمكن ذلك .

تمرين 2

المسافتان القصوى والدنيا لكوكب المريخ بالنسبة لمركز الشمس هما على التوالي $2,49.10^8 km$ و $2,06.10^8 km$

1 ـ ما طبيعة مدار كوكب المريخ حول الشمس ؟ ماذا يمثل المركز S بالنسبة للمدار ؟

2 ـ أحسب طول نصف المحور الأكبر لهذا المدار ؟

3 ـ أعط نص قانون المساحات . في أي نقطة من المدار تكون سرعة المريخ قصوى ؟ وفي أي نقطة تكون دنيا ؟

تمرين 3 **

تتعلق طبيعة المسار لقمر اصطناعي بقيمة السرعة v_0 التي أعطيت له عند تحريره من طرف المركبة الفضائية التي نقلته خارج المجال الجوي الأرضي .

هناك قيمتان خاصتان للسرعة في نقطة الدفع بالنسبة لارتفاع معين من سطح الأرض

ـ سرعة الاستقمار الدائري ونعبر عنها بالرمز v_S .

ـ سرعة التحرير ونعبر عنها بالرمز v_L

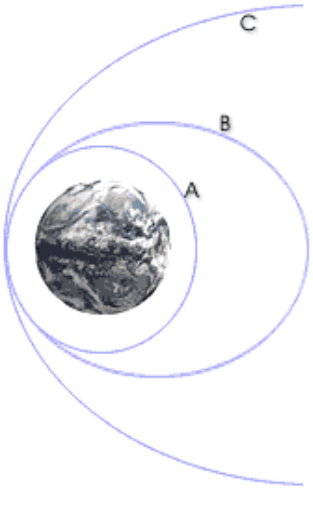
ـ $v_S = v_0$ مدار دائري .

ـ $v_S < v_0 < v_L$: مدار إهليلجي يشكل مركز الأرض إحدى بؤرتيه .

ـ $v_0 \geq v_L$ مدار شلجمي أو هدلولي (hyperpole) إذ لايحدث أي استقمار بحيث يكون القمر الاصطناعي مسبارا فضائيا .

يعطي الجدول أسفله قيم v_S و v_L بالنسبة لارتفاعات مختلفة :

الارتفاع	v_S	v_L
200km	25000km / h	39640km / h
800km	26800km / h	37940km / h
36000km	11040km / h	15620km / h



1 ـ تعرف على مختلف الوضعيات في الشكل أسفله

2 ـ أوجد سرعة الاستقمار بدلالة ارتفاع نقطة التحرير .

3 ـ تحقق حسابيا من القيم المقدمة في الجدول أعلاه .

4 ـ أحد ارتفاعات نقطة التحرير يوافق ارتفاع قمر اصطناعي ساكن بالنسبة للأرض . عين هذا الارتفاع وحدد الشروط التي ينبغي توفرها لكي يكون هذا القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض .نعطي كتلة الأرض $m_T = 5,98.10^{24} kg$.

تمرين 4

نعتبر قمرا اصطناعيا للاتصالات كتلته m يوجد مداره الدائري في مستوى خط الاستواء الذي يعتبر مدارا للأقمار الاصطناعية الساكنة بالنسبة للأرض ، تدرس حركة هذا القمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي

1 ـ 1 ـ 1 أعط تعريف المرجع المركزي الأرضي .

ما الدور المداري للأرض ؟ وما الدور الخاص لحركة الأرض ؟

1 ـ 2 ـ حدد السرعة الزاوية لحركة القمر الاصطناعي باعتباره ساكنا بالنسبة للأرض .

بالنسبة لأي مرجع يظهر القمر الاصطناعي ساكنا ؟

2 ـ 2 ـ 1 يوجد القمر الاصطناعي على ارتفاع $z = 35800km$. أحسب الشعاع r لمسار حركته . أعط مميزات متجهة السرعة $\vec{v}$ لمركز قصوره .

2 ـ 2 ـ حدد اتجاه ومنحى متجهة التسارع $\vec{a}$ وأعط تعبير a بدلالة r, v واحسب قيمتها .

3 ـ 3 ـ 1

التجاذب التي تطبقها الأرض . نعتبر أن كتلة الأرض m_T موزعة حسب طبقات متجانسة وكروية الشكل .

أعط تعبير v بدلالة الشعاع r والجداء $G.m_T$ حيث G ثابتة التجاذب الكوني .

استنتج تعبير القانون الثالث لكيبلر .

3 ـ 2 أحسب قيمة الجداء $G.m_T$.

3 ـ 3 تحقق من القيمة المحصلة علما أن شدة مجال الثقالة على سطح الأرض هي : $g_0 = 9,81 m/s^2$

4

المدار إهليليجي تمثل الأرض إحدى بؤرتيه حيث الارتفاع ا $z_P = 200km$ بالنقطة P

وارتفاعه القصوي z_A بالنقطة A هو لمدار حركة قمر الاصطناعي الساكن بالنسبة للأرض .

4 ـ 1 مثل مدار حركة القمر الاصطناعي حول الأرض مبرزا النقطتين P و A .

4 ـ 2 في أي نقطة من المدار تكون سرعة القمر الاصطناعي دنوية .

4ـ 3 أعط تعبير الدور المداري T_A للقمر الاصطناعي . أحسب T_A والمدة اللازمة لمرور القمر من النقطة P إلى النقطة A .

حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

I ـ الأفصول الزاوي ـ السرعة الزاوية (تذكير)

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشويه ، في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (Δ) .

نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة

1 ـ الأفصول الزاوي

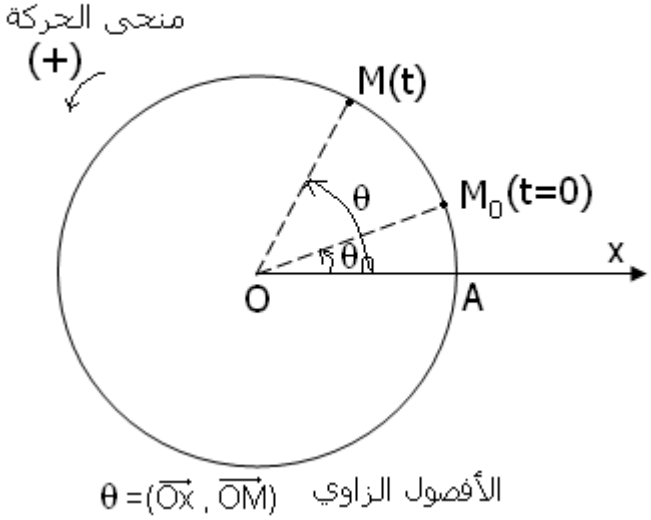
الأفصول الزاوي للنقطة المتحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو الزاوية الموجهة θ بحيث : $\theta = \left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ بحيث

أن $\overrightarrow{Ox}$ محورا مرجعيا (أصل الأطوار)

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجها في منحى الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) يتغير الأفصول الزاوي مع الزمن t أي أنه دالة زمنية $\theta(t)$.



2 ـ السرعة الزاوية $\dot{\theta}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) ، أنه في اللحظة t_i تحتل النقطة M الموضع M_i .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} تؤطران اللحظة t_i ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_i السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين t_{i+1} و t_{i-1} وهي :

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$\theta(t_{i+1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i+1}

$\theta(t_{i-1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

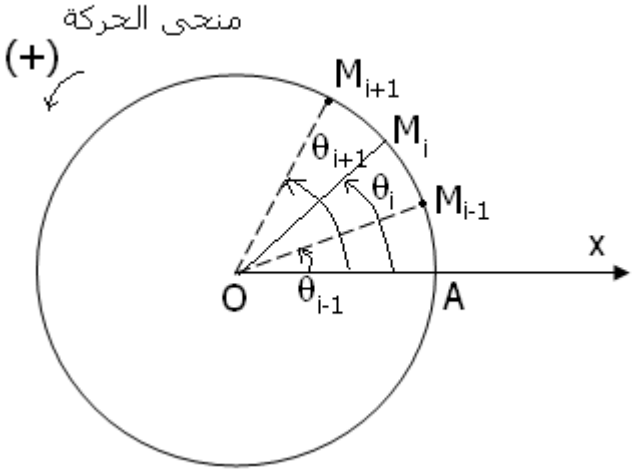
نضع $\Delta\theta = \theta(t_{i+1}) - \theta(t_{i-1})$ و $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1}$

إذا كانت t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين ، فإن Δt تتناهى نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي في اللحظة t_1.

وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي rad/s



يرتبط الأفصول الزاوي والأفصول المنحني $s(t)$ في كل لحظة بالعلاقة التالية : $s(t) = r.\theta(t)$

ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة اللحظية للنقطة M $v(t)=\dot{s}(t)$ (السرعة الخطية) والسرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$: $v(t)=r\dot{\theta}(t)$

3 ـ التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)$

أ ـ تعريف

لتكن $\dot{\theta}(t_i)$ السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة t_i بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} بحيث أن $\dot{\theta}(t_{i+1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i+1} و $\dot{\theta}(t_{i-1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

عندما تتناهى $\Delta t = t_{i+1}-t_{i-1}$ نحو الصفر يتناهى خارج القسمة $\frac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}$ إلى المشتقة بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي rad/s^2

تمرين تطبيقي :

1 ـ السرعة الزاوية لنقطة متحركة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي $\dot{\theta}=10rad/s$.

أ ـ أحسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ لهذه النقطة .

ب ـ ما طبيعة حركة النقطة M ؟

ج ـ أكتب تعبير الأفصول الزاوي θ بدلالة الزمن t علما أن الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ هو $\theta_0=2rad$.

2 ـ تعبير الأفصول الزاوي لنقطة N من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هو :

$\theta(t)=10t^2+40t+6$ حيث t بالثانية (s) و θ بالرديان (rad)

أ ـ أوجد تعبير السرعة الزاوية بدلالة الزمن .

ب ـ أوجد تعبير التسارع الزاوي بدلالة الزمن .

ج ـ ما طبيعة حركة النقطة N ؟

ب ـ المركبتان a_N و a_T في أساس فريني .

لدينا في أساس فريني : $\vec{a}=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$ بحيث أن

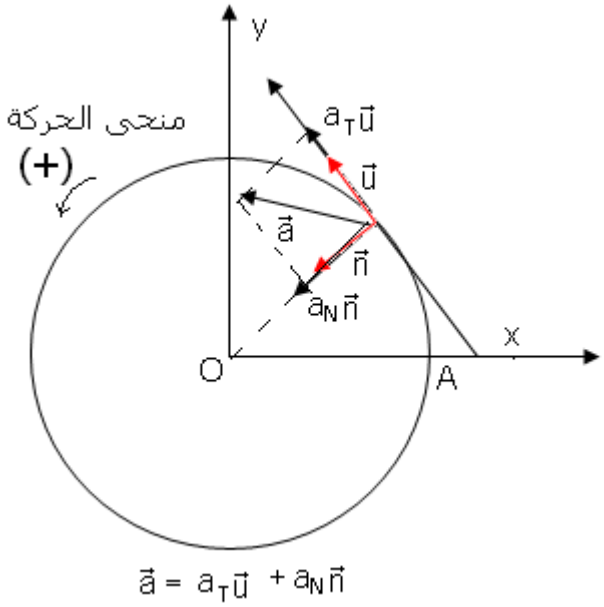
$$a_T=\frac{dv}{dt} \quad \text{و} \quad a_n=\frac{v^2}{\rho}$$

s الأفصول المنحني للنقطة M في لحظة t و $v=\frac{ds}{dt}$

السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و ρ شعاع انحناء المسار في اللحظة t .

حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ، فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائريا ممركزا على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة الواحدية $\vec{n}$ نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع الانحناء مساويا لشعاع الدائرة r .

نعلم أن $s=r.\theta$ وأيضا $\dot{s}=r\dot{\theta}$ ومنه فإن



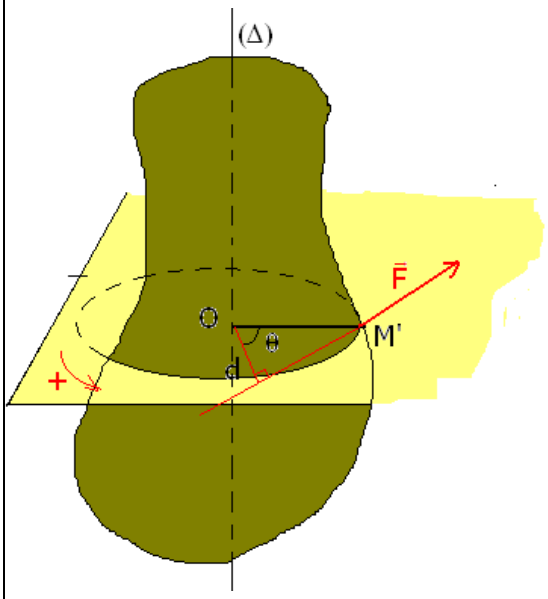
$$a_T = \frac{dv}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt} = r.\dot{\theta}$$

ولدينا كذلك $\rho = r$ أي أن $$a_N = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r(\dot{\theta})^2$$

II ـ العلاقة الأساسية للتحريك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .

تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت

1 ـ نص العلاقة



في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت (Δ) في كل لحظة ، جداء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم في اللحظة المعينة :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

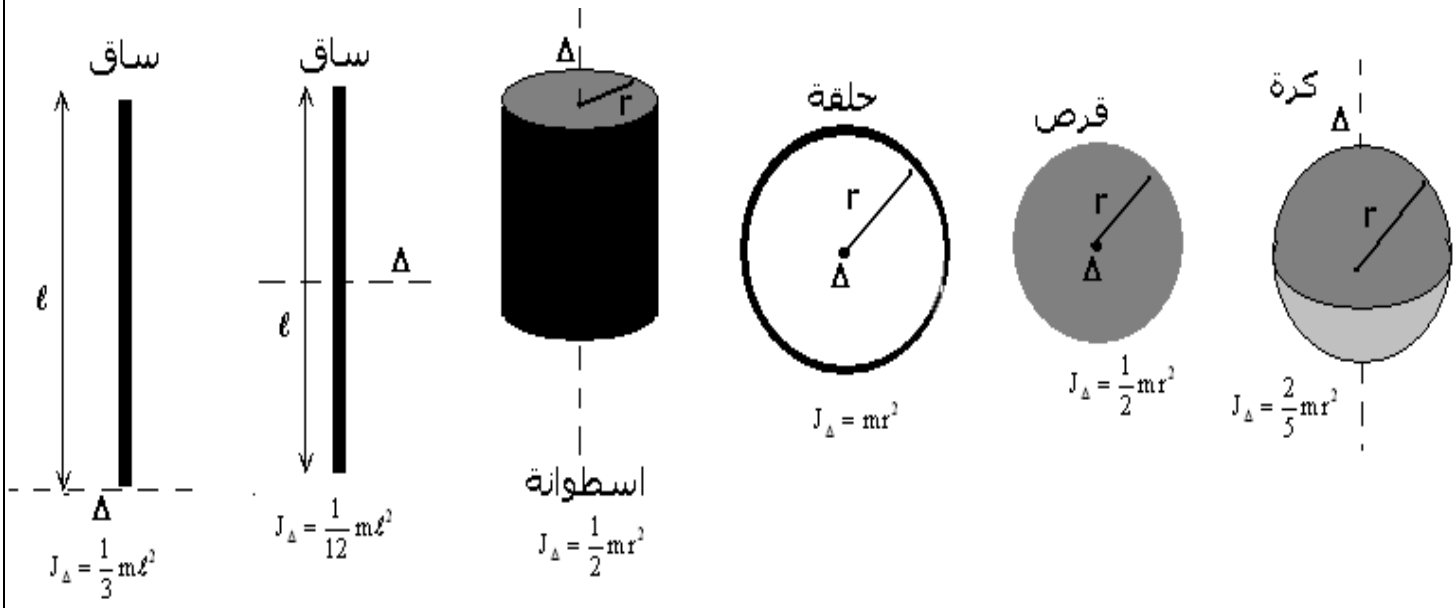
$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$ مجموع العزوم بالنسبة للمحور Δ للقوى المطبقة على الجسم الصلب $(N.m)$

J_Δ عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب $kg.m^2$

$\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي نعبر عنه ب rad/s^2

2 ـ تعابير عزم القصور لأجسام متجانسة ذات أشكال هندسية بسيطة .

عزم قصور J_Δ لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور (Δ)



حالتان خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما $\ddot{\theta} = 0$ فإن حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية منتظمة .

إذا كان التسارع الزاوي ثابتا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية متغيرة بانتظام .

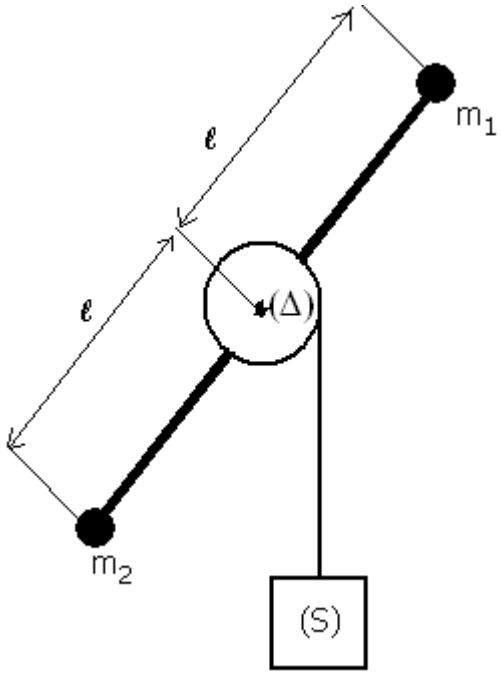
III ـ تطبيق : حركة مجموعة ميكانيكية في حالة إزاحة ودوران حول محور ثابت .

نعتبر أسطوانة متجانسة شعاعها $r=10cm$ وكتلتها $m=1kg$ يمكنها الدوران حول محور ثابت (Δ) حيث يمر بمركزها ساق T ثبت في طرفيه جسمين نقطيين كتلتهما $m_1=m_2=0,5kg$ ، يوجد مركز قصورهما على نفس المسافة $\ell=50cm$ من المحور (Δ) . تحمل الأسطوانة جسما (S) كتلته $m'=10kg$ ، بواسطة حبل ملفوف حولها نعتبره غير قابل الامتداد وكتلته مهملة.

نترك المجموعة بدون سرعة بدئية ، علما أن الاحتكاكات مهملة وكذلك كتلة الساق .

1 ـ أوجد التسارع a للجسم (S) وتوتر الحبل أثناء الحركة

2 ـ عين السرعة الزاوية للأسطوانة عندما يقطع الجسم مسافة $h=5m$. نعطي $g=10m/s^2$



تمرين 3

ندير قرصا متجانسا ، كتلته $m=10kg$ وشعاعه $r=10cm$ ، حول محوره إلى أن تصير سرعة دورانه 400 دورة في الدقيقة ، تم نتركه

نلاحظ أن القرص يتوقف عن الدوران بعد ثلاث دقائق تحت تأثير الاحتكاك الذي نقرن به مزدوجة ، نعتبر عزمها ثابتا .

1 ـ أحسب التسارع الزاوي للقرص .

2 ـ استنتج عزم المزدوجة الـ

الجواب :

1 ـ نقوم بدراسة حركة القرص انطلاقا من حصوله على السرعة الزاوية $\omega_0=\frac{2\pi\times400}{60}=41,8rad/s$ إلى أن يتوقف أي أن سرعته الزاوية منعدمة . حركة القرص في هذه المرحلة حركة دائرية متغيرة بانتظام ، يمكن أن نبين ذلك بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{F}\right)=J_{\Delta}.\ddot{\theta}\Rightarrow \mathcal{M}_C=J_{\Delta}.\ddot{\theta}\Rightarrow \ddot{\theta}=\frac{\mathcal{M}_C}{J_{\Delta}}=cte$$

أي أن المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي : $\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2+\omega_0 t$ ومعادلة السرعة كذلك هي :

$$\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}t+\omega_0$$

عند انعدام السرعة الزاوية لدينا : $\ddot{\theta}t+\omega_0=0\Rightarrow\ddot{\theta}=-\frac{\omega_0}{t}$

تطبيق عددي : $\ddot{\theta}=-\frac{\omega_0}{t}=-\frac{41,8}{3\times60}=-0,23rad/s^2$

2 ـ حساب عزم المزدوجة المقاومة :

$\mathcal{M}_C=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ بحيث أن $J_{\Delta}=\frac{1}{2}mr^2=0,05kg.m^2$ وبالتالي فإن $\mathcal{M}_C=-0,0115N.m$

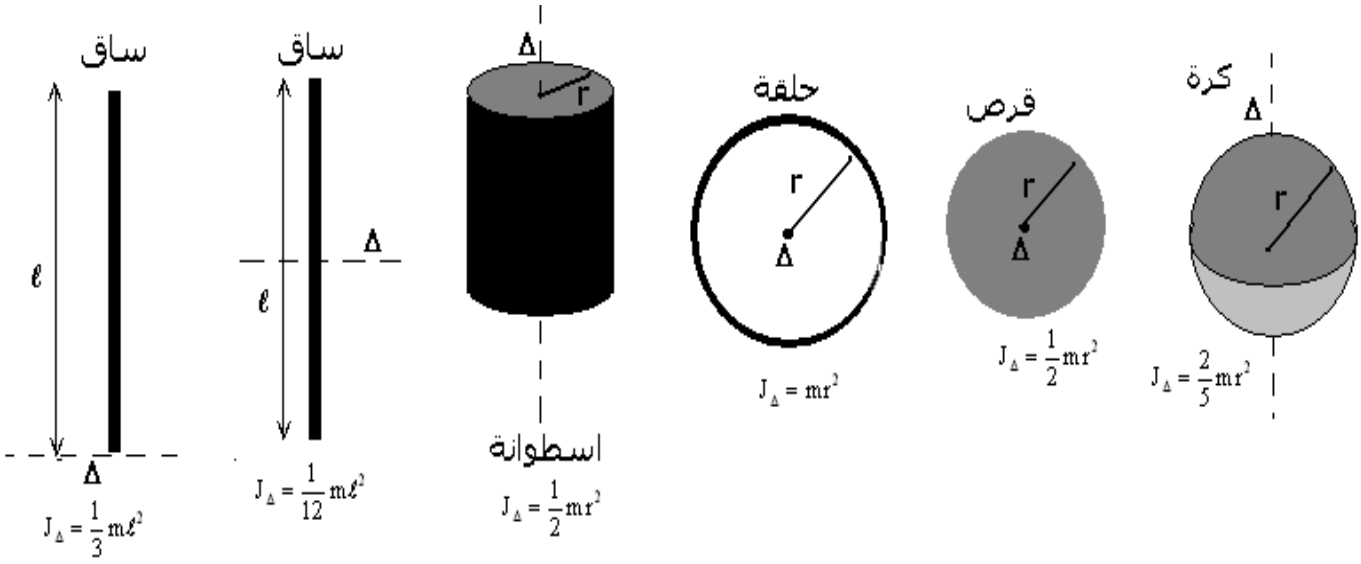
حساب عدد الدورات المنجزة قبل لأن يتوقف :

$\theta=-0,23t^2+41,8t$ لدينا $\theta=-0,23(180)^2+41,8(180)=72rad$

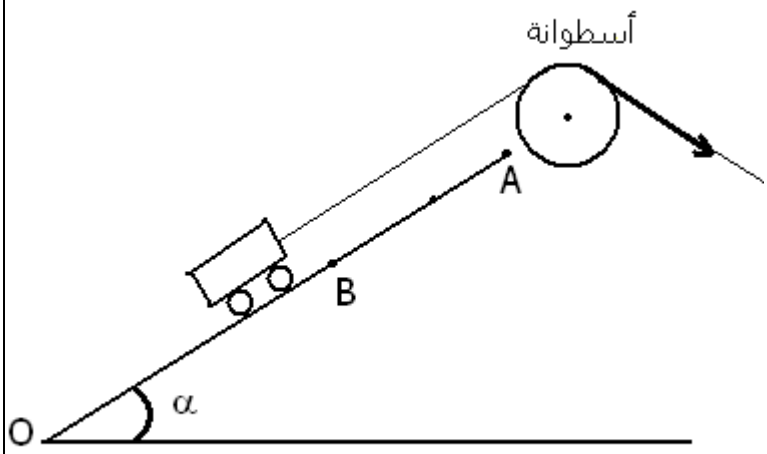
ونعلم أن $\theta=2\pi n\Rightarrow n=\frac{\theta}{2\pi}=11,5$

تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

عزم قصور لبعض الأجسام المتجانسة ومختلفة الأشكال .



تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8m/s^2$

يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_C = 250g$ وشعاعها $r = 6cm$.

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم $\mathcal{M}$ ثابت .

العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA = 2m$. كتلة العربة هي $m_S = 400g$.

1 ـ أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارعا $a = 0,5m/s$

2 ـ أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم $\mathcal{R}$.

3 ـ على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

4 ـ أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة $\mathcal{M}$.

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta = 6.10^{-2} kg.m^2$

1 ـ يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد r=0,1m من المحور Δ .

1 ـ 1 ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

1 ـ 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$

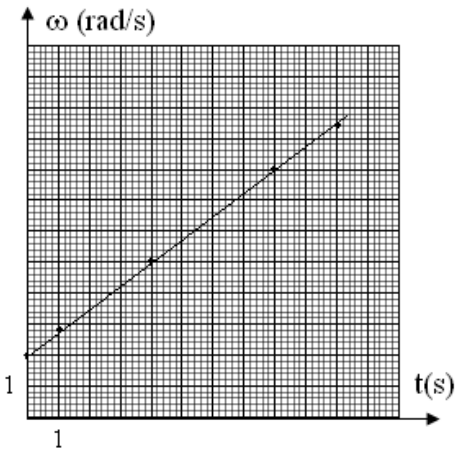
2 ـ علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

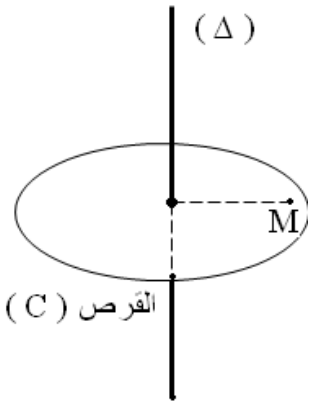
2 ـ 1 اكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta = f(t)$

2 ـ 2 احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1 = 4,0s$ و $t_2 = 5,2s$

2 ـ 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ t=2s . احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع المنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع $\ddot{\theta}$.

3 ـ احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .





تمرين 3

ينزلق جسم (S) كتلته m = 70 kg على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا الأخير قوى الاحتكاكات تكافئ قوة $\vec{f}$ موازية للمستوى ومنحاها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم

$$(\|\vec{f}\| = \frac{1}{10}\|\vec{P}\|)$$

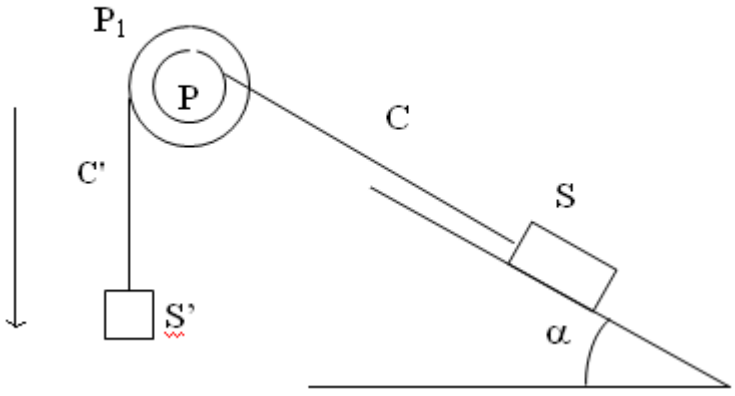
1- خلال المرحلة الأولى, يطبق الحبل على الجسم قوة ثابتة $\vec{F}$ موازية للمستوى المائل , بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5m بسرعة $v_B = 5m/s$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B ، تأخذ القوة $\vec{F}$ قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث BD=25m .

- أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة $\vec{F}$.

2- بعد أن قطع الجسم 30 m , ينقطع الحبل . ما هي طبيعة حركة الجسم ؟ أستنتج المدة الزمنية التي استغرقها مند انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها .

3- للقيام بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي :



الحبل ملفوف على أسطوانة P . شعاعها R = 25cm أسطوانة ثانية P_1 مثبتة على الأسطوانة الأولى P

وشعاعها R_1= 50cm ، لهما نفس المحور(Δ) . نلف حبل آخر C′ حيث تبث في طرفه الحر جسما (S′) له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل .

عزم قصور المجموعة (P_1 ,P) $J_\Delta = 1.375kg.m^2$

باعتمادك على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1) . أحسب خلال كل مرحلة :

أ- المسافة المقطوعة من طرف S′ .

ب- توتر الحبل C′ .

ج- قيمة الكتلة m_1

وأكتب المعادلة الزمنية لحركة (S') خلال كل مرحلة .

4- أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للأسطوانة عند انقطاع الحبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S' عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

تمرين 4

نعتبر جسما صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1kg$ قابل للانزلاق على سكة أفقية . (S_1) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدود ، كتلته مهملة ، يمر في مجرى بكرة (B) متجانسة شعاعها $r = 4cm$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المتكونة من من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$ للبكرة .

1 ـ أوجد مبيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$.

2 ـ حدد معللا جوابك ، طبيعة حركة (B) .

3 ـ أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25s$.

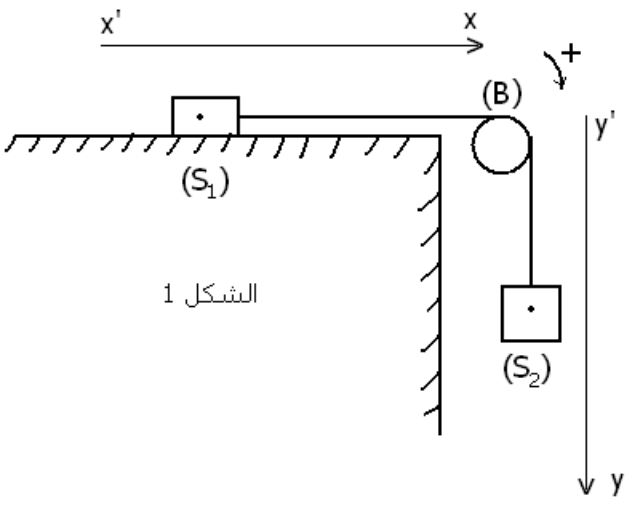
4 ـ حدد ، معللا جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1)و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

5 ـ يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على كل من (S_1) و (S_2) و (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي :

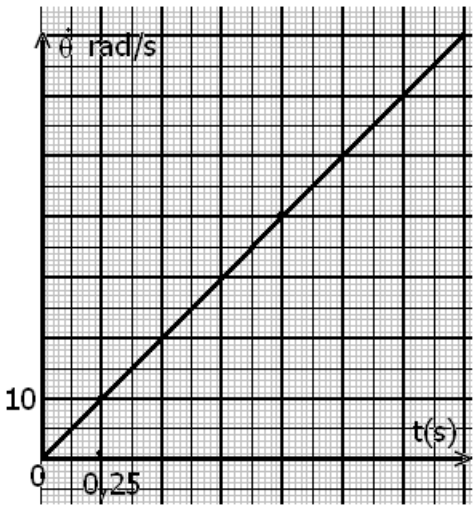
$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = tan\,\varphi$ معامل الاحتكاك .

6 ـ بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها ز يعطى $k = tan\,\varphi = 0,16$



الشكل 1



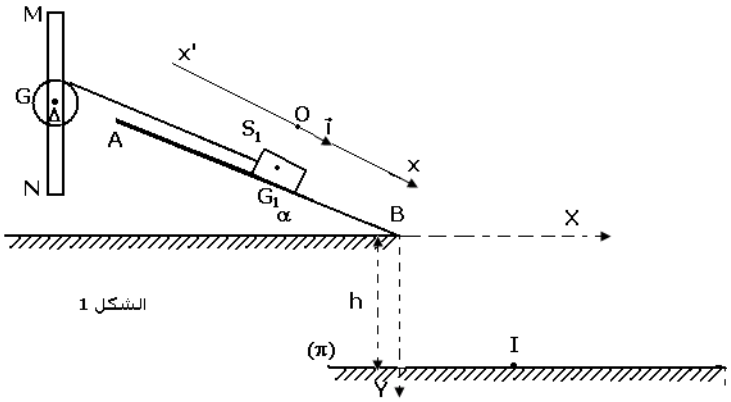
الشكل 2

تمرين 5 ***

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمتكونة من :

ـ بكرة متجانسة شعاعها r=5cm ملتحمة بساق طولها MN=2L=40cm يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة {الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي Δ ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور Δ هو J_Δ .

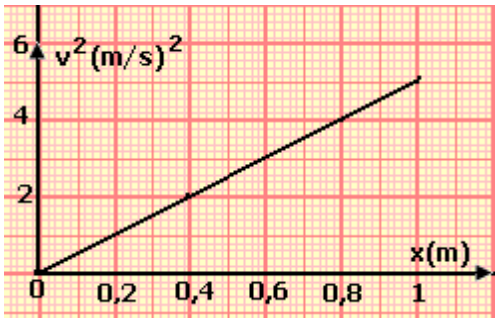


الشكل 1

ـ خيط f غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1 كتلته m=0,8kg ومركز قصوره G_1 . الجسم S_1 قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .

نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة t=0 حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالأفصول x .



1 ـ أوجد اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم S_1 بدلالة m ، r ، J_Δ ، α و g .

2 ـ يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x $(v^2=f(x))$.

2 ـ 1 حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة {الساق ، البكرة } .

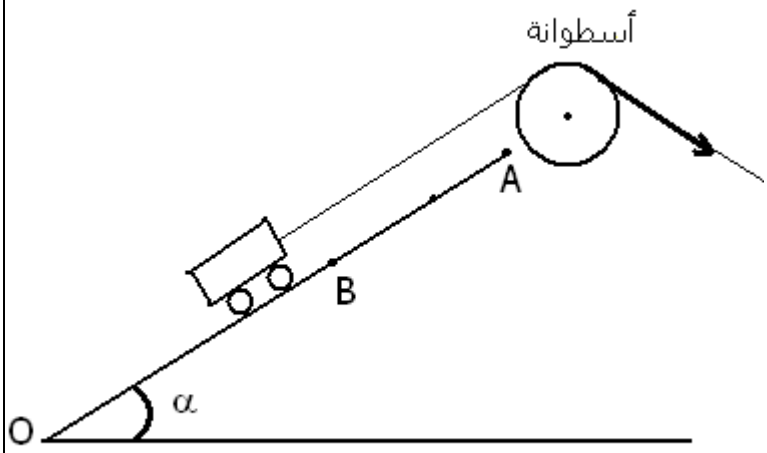
2 ـ 2 ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B=0,8m$ فيسقط عند I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة h=1m من النقطة B .

2 ـ 2 ـ 1 أوجد إحداثيي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BY})$.

2 ـ 2 ـ 2 أحسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط .

تصحيح تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8m/s^2$

يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_C = 250g$ وشعاعها $r = 6cm$.

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم $\mathcal{M}$ ثابت .

العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA = 2m$. كتلة العربة هي $m_S = 400g$.

1 ـ أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارعا $a = 0,5m/s$

2 ـ أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم $\mathcal{R}$.

3 ـ على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

4 ـ أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة $\mathcal{M}$.

الجواب :

1 ـ حساب قوة الجر T :

نختار جسم مرجعي مرتبط بالأرض ومعلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{i})$ مواز للمستوى المائل وموجه في نفس منحى حركة العربة و $(O,\vec{j})$ عمودي على المستوى المائل وموجه نحو الأعلى .

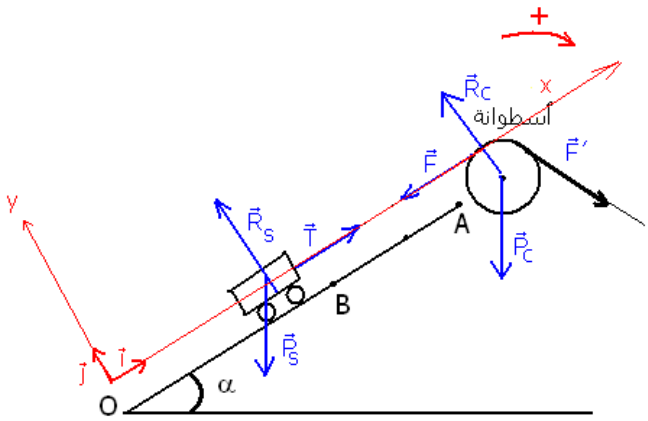
أنظر الشكل

دراسة حركة العربة S :

القوى المطبقة على العربة (S) كمجموعة مدروسة : $\vec{P}_S, \vec{R}_S, \vec{T}$

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا

$$\vec{P}_S + \vec{R}_S + \vec{T} = m_S\vec{a}_G$$



نسقط العلاقة على المحور $(O,\vec{i})$ فنجد :

$$P_{Sx} + R_{Sx} + T_x = m_S.a \qquad (a_x = a)$$

$$-m_S g\,\sin\alpha + T = m_S.a$$

تمكن هذه العلاقة من حساب شدة توتر الخيط T بحيث أن

$$T = m_S a + m_S g\,\sin\alpha$$

$$T = m_S\left(a + g\,\sin\alpha\right)$$

تطبيق عددي : $T = 2,16N$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة باعتبار أن السرعة البدئية منعدمة عند أصل المعلم :

بما ن التسارع ثابت إذن فحركة مركز قصور العربة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ عند أصل المعلم (t=0) لدينا $x_0=0$ و $v_0=0$ وبالتالي فإن المعادلة الزمنية هي

$$x=0,25t^2$$

3 ـ المسافة OB التي يجب عندها حذف قوة الجر لكي يصل إلى النقطة A بسرعة منعدمة :

نقسم مسار العربة إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى وهي OB حيث أن حركة العربة حركة مستقيمية متغيرة بانتظام : $x=0,25t^2$ و $v=0,5t$

عند النقطة B تكون سرعة العربة هي : $v_B=5t_B$ بحيث أن

$$t_B=\frac{v_B}{0,5}\Rightarrow x_B=OB=0,25\times\left(\frac{v_B}{0,5}\right)^2$$

$$v_B^2=\frac{(0,5)^2}{0,25}\times OB\Rightarrow v_B^2=OB$$

المرحلة الثانية هي عندما تقطع العربة المسافة BA ، نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}m_Sv_A^2-\frac{1}{2}m_Sv_B^2=\underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right)+\underset{B\to A}{W}\left(\vec{R}_S\right)$$

لدينا حسب المعطيات أن العربة ستتوقف في النقطة A أي أن $v_A=0$ وأن $\vec{R}_S$ عمودية على متجهة الانتقال أي أن شغلها منعدم . وبالتالي :

$$-\frac{1}{2}m_Sv_B^2=\underset{B\to A}{W}\left(\vec{P}_S\right)\Rightarrow v_B^2=2gBA\,\sin\alpha$$

$$OB=2g\left(-OB+OA\right)\sin\alpha$$

$$OB\left(1+2g\sin\alpha\right)=2gOA\sin\alpha\Rightarrow OB=\frac{2gOA\sin\alpha}{\left(1+2g\sin\alpha\right)}=1,82m$$

4 ـ عزم قصور الأسطوانة هو :

$$J_\Delta=\frac{1}{2}m_Cr^2=4,5.10^{-4}kg.m^2$$

لنستنتج قيمة $\mathcal{M}$:

دراسة حركة اللأسطوانة C :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الأسطوانة :

القوى المطبقة على الأسطوانة هي :

$\vec{T}'$ ، $\vec{P}_C,\vec{R}_C,\mathcal{M}\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$

$\mathcal{M}_\Delta=J_\Delta.\ddot{\theta}$ بحيث أن $a=r\ddot{\theta}$ لكون أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . أي أن $\frac{a}{r}=\ddot{\theta}$ وبالتالي فإن

$$\mathcal{M}_\Delta=J_\Delta.\frac{a}{r}+T'.r=0,13N.m$$

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta=6.10^{-2}kg.m^2$

1 ـ يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد r=0,1m من المحور Δ .

1 ـ 1 ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

1 ـ 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}=f(t)$

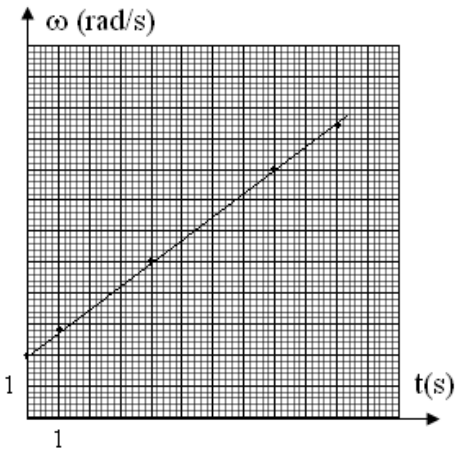
2 ـ علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

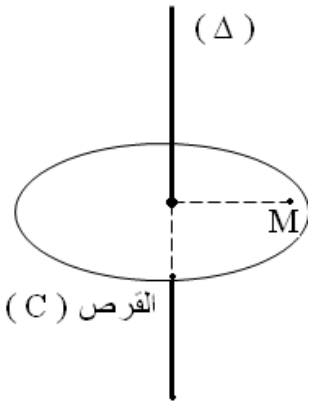
2 ـ 1 اكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta=f(t)$

2 ـ 2 احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1=4,0s$ و $t_2=5,2s$

2 ـ 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ t=2s . احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع ألمنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع $\ddot{\theta}$.

3 ـ احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .





الأجوبة :

1 ـ 1 طبيعة حركة M :

النقطة M حركة دائرية متغيرة بانتظام

1 ـ2 قيمة التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0{,}75 rad/s^2$$

$$\omega(t) = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$$\omega(t) = 0{,}75t + 2 \quad (rad/s)$$

2 ـ 1 المعادلة الزمنية للحركة M $\theta(t) = 0{,}375t^2 + 2t \quad (rad)$

2 ـ2 عدد الدورات القرص بين اللحظتين t_1 وt_2

$$n = \frac{\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2}}{4\pi(t_2 - t_1)}$$ أي أن $n = 1$

2 ـ 3 قيمتي التسارع المماس والتسارع ألمنظمي

$$a_t = r\ddot{\theta} \Rightarrow a_t = 75.10^{-3} rad/s^2$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2 \Rightarrow a_n = 1{,}225 rad/s^2$$

منظم متجهة التسارع هو

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$$

$$a = 1{,}227 rad/s^2$$

3 ـ مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ

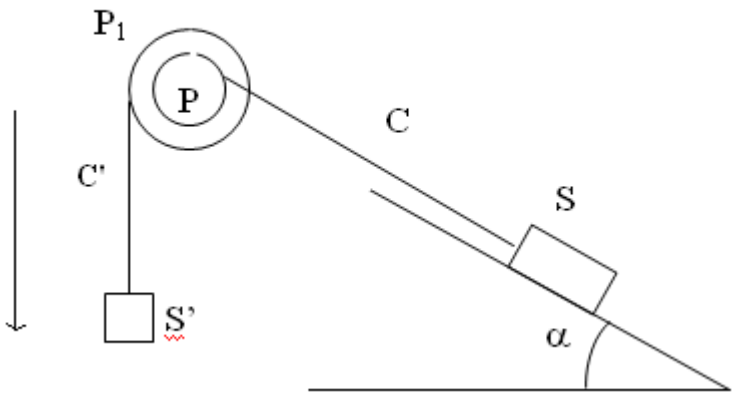
$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$= 45.10^{-3} N.m$$

تمرين3

ينزلق جسم (S) كتلته m = 70 kg على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية α = 30° بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا

الأخير قوى الاحتكاكات تكافئ قوة $\vec{f}$ موازية للمستوى ومنحاها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم $(\left\|\vec{f}\right\|=\frac{1}{10}\left\|\vec{P}\right\|)$



1- خلال المرحلة الأولى, يطبق الحبل على الجسم قوة ثابتة $\vec{F}$ موازية للمستوى المائل , بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5m بسرعة $v_B=5m/s$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B ، تأخذ القوة $\vec{F}$ قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث BD=25m .

- أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة $\vec{F}$.

2- بعد أن قطع الجسم 30 m , ينقطع الحبل . ما هي طبيعة حركة الجسم ؟ أستنتج المدة الزمنية التي استغرقها مند انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها .

3- للقيام بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي :

الحبل ملفوف على أسطوانة P . شعاعها R = 25cm أسطوانة ثانية P_1 مثبتة على ألأسطوانة الأولى P وشعاعها R_1= 50cm ، لهما نفس المحور(Δ) .

نلف حبل آخر C′ حيث تبث في طرفه الحر جسما (S′) له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل .

عزم قصور المجموعة (P_1 ,P) $J_\Delta=1.375kg.m^2$

باعتمادك على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1) . أحسب خلال كل مرحلة :

أ- المسافة المقطوعة من طرف S′ .

ب- توتر الحبل C′ .

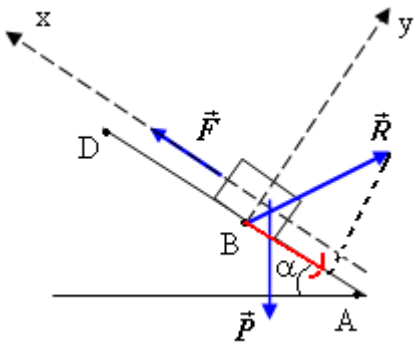
ج- قيمة الكتلة m_1

وأكتب المعادلة الزمنية لحركة (S′) خلال كل مرحلة .

4- أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للأسطوانة عند انقطاع الحبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S′ عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

الجواب :

1 ـ في المرحلة الأولى :



نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الأولى :

$$\frac{1}{2}mv_B^2=F.\ell-\frac{mg}{10}\ell-mg\ell\sin\alpha$$

$$F=\frac{mv_B^2}{2\ell}+\frac{mg}{10}+mg\sin\alpha$$

$$F=595N$$

المرحلة الثانية a=0 حسب مبدأ القصور ؛

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}\Rightarrow\vec{F}+\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{i})$

$\boldsymbol{F=mg\sin\alpha+\frac{mg}{10}}$ تطبيق عددي $\boldsymbol{F=420N}$

2 ـ عند انقطاع الحبل :

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}'$

الاسقاط على $(O,\vec{i})$ $a'=-g(\sin\alpha+\frac{1}{10})\Rightarrow a'=-6m/s^2$

طبيعة الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام

المدة الزمنية المستغرقة مند انطلاق الجسم من النقطة A إلى حين الرجوع إليها .

$t=t_1+t_2+t_3+t_4$

t_1 المدة المستغرقة لقطع المسافة AB $\Delta V=a.\Delta t\Rightarrow \Delta t=\frac{\Delta V}{a}=t_1$

إذن $t_1=2s$

المدة الزمنية المستغرقة خلال المرحلة التي انقطع فيها الحبل : $\Delta x=V_B t_2\Rightarrow t_2=\frac{BD}{V_B}=5s$

t_3

بما أن الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام وهي متباطئة ،

$\Delta v=a'\Delta t\Rightarrow \Delta t=-\frac{v_B}{a'}=0,83s$

والمسافة التي يقطعها الجسم هي : $DE=\frac{1}{2}a't^2+v_Bt=2,08m$

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرحلة الرجوع

حساب التسارع :

$mg\sin\alpha-\frac{mg}{10}=ma''\Rightarrow a''=g(\sin\alpha-0,1)=3,92m/s^2$

نعتبر أن أصل المعلم هو E وأصل التواريخ كذلك : $EA=\frac{1}{2}a''t^2\Rightarrow t_4=\sqrt{\frac{2EA}{a''}}=4,04s$

إذن $t=11,87s$

3 ـ الدراسة التحريبية

<u>حساب المسافة المقطوعة خلال المرحلتين السابقتين</u> :

العلاقة بين x وz بحيث أن x موضع الجسم في لحظة t وz موضع الجسم S' في نفس اللحظة t

نعتبر أنه في نفس اللحظة t أن الأفصول الزاوي للأسطوانة هو θ . نعتبر أن الحبل غير قابل الانزلاق على

الأسطوانة $x=R\theta$ و $z=R_1\theta$ أي أن $\frac{x}{R}=\frac{z}{R_1}$ وبما أن $R_1=2R$ نستنتج من هذه العلاقة $z=2x$

* في المرحلة الأولى x=AB وبما أن AB=5m فإن z=10m

* في المرحلة الثانية x=BD وBD=25m فإن z=50m

<u>حساب التوتر T_1</u>

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S لحساب التسارع في المرحلة الأولى نستعمل معطيات السؤال (1) :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$F-mg\sin\alpha-f=ma\Rightarrow a=\frac{F-mg\sin\alpha-f}{m}$

$a=2,5m/s^2$

دراسة المجموعة في الحالة الجديدة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن في الحالة الجديدة على الجسم (S):

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$$

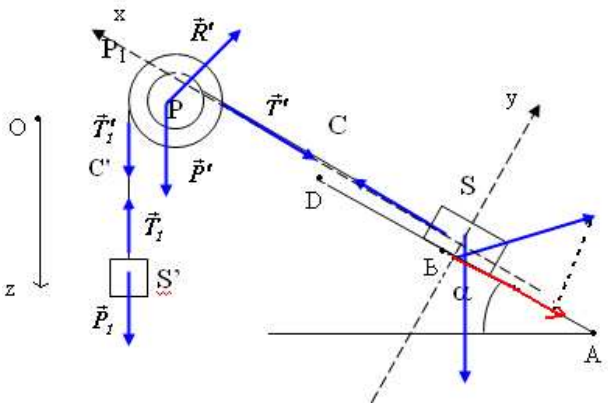
إسقاط العلاقة على $(O,\vec{i})$ (1) $T=mg\sin\alpha+\frac{mg}{10}+ma$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة (2) $T_1R_1-TR=J_\Delta\ddot{\theta}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S′ (3) $T_1=m_1(g-a_1)$

من العلاقة (1) والعلاقة (2) نستنتج

$$T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+T\frac{R}{R_1} \quad et \quad T=F\Rightarrow T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+F\frac{R}{R_1}$$



في المرحلة الأولى : T_1=325N

في المرحلة الثانية T_1=210N a=0

<u>حساب الكتلة في المرحلتين</u> : نطبق العلاقة (3)

$$T_1=m_1(g-a_1)$$

$$z=2x\Leftrightarrow\ddot{z}=2\ddot{x}$$

$$a_1=2a$$

$$T_1=m_1(g-2a) \quad \text{أي أن} \quad m_1=\frac{T_1}{g-2a}$$

في المرحلة الأولى : m_1=65g

في المرحلة الثانية m_1=21g (m_1 الكتلة التي يجب أن يأخذها الجسم S′ للحصول على حركة بالمواصفات المذكورة في المرحلة 2)

<u>المعادلات الزمنية :</u>

* المرحلة الأولى $z=2,5t^2$

* المرحلة الثانية $z=10t+10$

<u>4 ـ عندما ينقطع الحبل .</u>

<u>السرعة الزاوية للأسطوانة</u> : $x=R\theta\Leftrightarrow\dot{x}=R\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}=\frac{V_D}{R}$$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}=20rad/s$

<u>لحساب السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S′ :</u>

<u>ـ نحسب المدة الزمنية المستغرقة من طرف S لمروره من A</u>

<u>عندما ينقطع الحبل :</u> $t=4,87s$ أنظر السؤال 2

<u>ـ الدراسة الدينامكية للمجموعة { أسطوانة +جسم S′ } عند انقطاع الحبل</u>

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S′ $\vec{P}+\vec{T}=m_1\vec{a}$

الاسقاط على Oz $P-T=m_1a_2$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $T'.R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$

نستنتج T=T′

$$(m_1g-m_1R_1\ddot{\theta}')R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$$

$$\ddot{\theta}'=\frac{m_1gR_1}{m_1R_1+J_\Delta}\Rightarrow\ddot{\theta}'=15,85rad/s^2$$

حركة البكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام عند اللحظة t=3,9s السرعة الزاوية للأسطوانة هي

$$\dot{\theta}=15.85t+20\Rightarrow\dot{\theta}=97,2rad/s$$

وسرعة الجسم S′ هي $V = R_1\dot{\theta} \Rightarrow V = 48,6m/s$

تمرين4

نعتبر جسما صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1kg$ قابل للانزلاق على سكة أفقية . (S_1) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدود ، كتلته مهملة ، يمر في مجرى بكرة (B) متجانسة شعاعها $r = 4cm$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المتكونة من من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$ للبكرة .

1 ـ أوجد مبيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$.

2 ـ حدد معللا جوابك ، طبيعة حركة (B) .

3 ـ أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25s$.

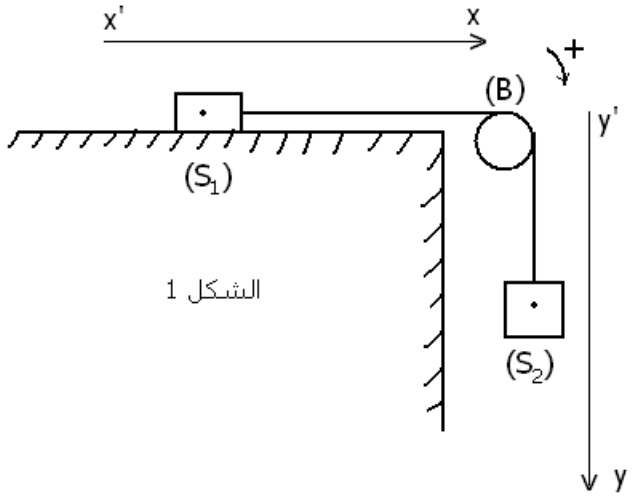
4 ـ حدد ، معللا جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1)و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

5 ـ يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على كل من (S_1) و (S_2) و العلاقة الأساسية للتحريك على (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي

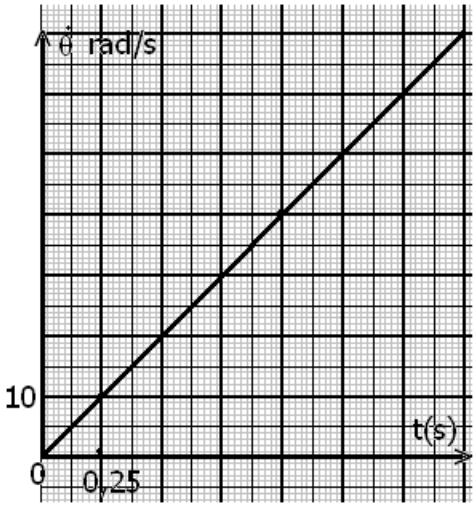
$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = tan\,\varphi$ معامل الاحتكاك .

6 ـ بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها . نعطى $k = tan\,\varphi = 0,16$



الشكل 1



الشكل 2

الجواب :

1 ـ إيجاد مبيانيا السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$:

من خلال المبيان يتبين أن $\dot{\theta}(t)$ هي دالة خطية تمر من أصل المعلم معاملها الموجه هو :

$a=\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}=40rad/s^2$ وبالتالي فالمعادلة تكتب على الشكل التالي : $\dot{\theta}(t)=40t$

2 ـ طبيعة حركة (B) :

السرعة الزاوية عبارة عن دالة خطية على شكل $\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}t$ أي أن $\frac{d\dot{\theta}}{dt}=40rad/s^2=cte$ وبالتالي فحركة البكرة : حركة دورانية متغيرة بانتظام تسارعها الزاوي $\ddot{\theta}=40rad/s^2$.

3 ـ تعبير n عدد الدورات البكرة عند اللحظة t :

بما أن الحركة دورانية متغيرة بانتظام فإن معادلتها الزمنية تك

$$\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2\Rightarrow\theta(t)=20t^2$$

ونعلم أن عدد الدورات خلال اللحظة t هو : $\theta(t)=2\pi n\Rightarrow n=\frac{\theta(t)}{2\pi}$

أي أن : $n=\frac{20t^2}{2\pi}=\frac{10t^2}{\pi}$

عند $t=1,25s$ يكون عدد الدورات هو : $n=4,97\simeq 5$

4 ـ طبيعة كل من S_1 و S_2 :

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة وغير مدود فإن المسافة x_1 التي ينتقل بها الجسم S_1 على $(O,\vec{i})$ هي نفس المسافة y_1 التي سينتقل بها الجسم S_2 على المحور $(O,\vec{j})$ ونفس طول القوس s_B الذي ستنتقل به نقطة على مجرى البكرة أي أن $x_1=y_1=s_B$ ولدينا $s_B=r\theta$ أي أن

$$x_1=y_1=r\theta\Rightarrow v_1=v_2=r\dot{\theta}\Rightarrow a_1=a_2=r\ddot{\theta}$$

نستنتج أن S_1 و S_2

هي حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

حساب قيمة تسارعهما $a=r\ddot{\theta}=1,6m/s^2$

5 ـ لنثبت العلاقة التالية : $a=\frac{(m_2-m_1.k)g}{m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على كل من S_1 و S_2 :

على S_1 : $\vec{P}_2+\vec{T}_2=m.\vec{a}$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{j})$:

$$m_2g-T_2=m_2a\Rightarrow T_2=m_2g-m_2a$$

على S_1 : $\vec{P}_2+\vec{R}+\vec{T}_2=m_1.\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$$-f+T_2=m_2a$$

على $(O,\vec{j})$: $R_N-m_1g=0\Rightarrow R_N=m_1g$

نعلم أن $k=\tan\varphi=\frac{f}{R_N}\Rightarrow f=m_1gk$

في العلاقة الأولى : $T_2=km_1g+m_1a$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على B

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T_1}\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T_2}\right)=J_\Delta\ddot{\theta}\Rightarrow -T_1.r+T_2r=J_\Delta.\frac{a}{r}$$

$$T_2-T_1=\frac{J_\Delta}{r^2}$$

نعوض T_1 و T_2 بتعبيريهما المحصل عليه سابقا :

$$a\left(m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}\right)=m_2g-km_1g\Rightarrow a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}}$$

لكي تتم حركة S_1 يجب أن يكون التسارع $a>0$ أي أن

$$a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}}>0\Rightarrow m_2-km_1>0$$

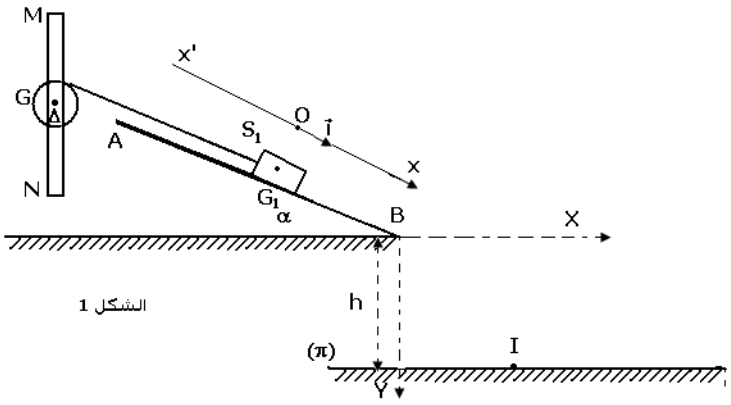
$$m_2>km_1\Rightarrow m_2>0.16kg$$

تمرين5

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

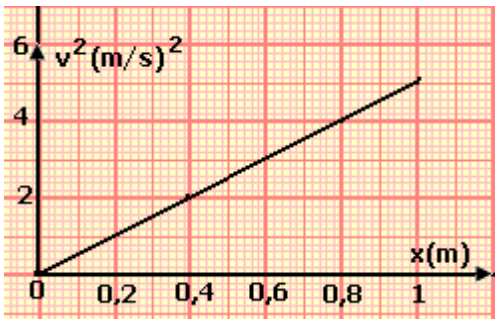
نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمتكونة من :

ـ بكرة متجانسة شعاعها r=5cm ملتحمة بساق طولها MN=2L=40cm يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة {الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي Δ ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور Δ هو J_Δ .



الشكل 1

ـ خيط f غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1 كتلته m=0,8kg ومركز قصوره G_1 . الجسم S_1 قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .



نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة t=0 حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نمعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالأفصول x .

1 ـ أوجد اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم S_1 بدلالة m ، r ، J_Δ ، α و g .

2 ـ يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x ($v^2=f(x)$) .

2 ـ 1 حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة {الساق ، البكرة } .

2 ـ 2 ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B=0,8m$ فيسقط عند I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة h=1m من النقطة B .

2 ـ 2 ـ 1 أوجد إحداثيي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BY})$.

2 ـ 2 ـ 2 أحسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط .

الجواب :

الدراسة التحريكية للجسم (S_1) :

المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P}_1$ ، تأثير السطح $\vec{R}$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}$.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1.\vec{a}$ و منه :

$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}$.

إسقاط العلاقة المتجهية على المحور $(O;\vec{i})$ نحصل على : $m_1.g.\sin\alpha - T = m_1.a$ و بالتالي :

$$(1)\quad T = m_1 g\sin\alpha - m_1 a$$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

المجموعة المدروسة : البكرة

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}'$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}'$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}'$.

$\sum M_\Delta(\vec{F}_{app}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ و منه : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}') = J_\Delta.\ddot{\theta}$ مع $M_\Delta(\vec{P}') = M_\Delta(\vec{R}') = 0$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية : $(2)\quad T'.r = J_\Delta.\ddot{\theta}$

بما أن الخيط غير مدود و كتلته مهملة فان : $T' = T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$\theta = \frac{x}{r}$ و منه : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$. من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث : $a = g.\frac{m.\sin\alpha}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}$

2 – 1 – من خلال المبيان يتبين أن $V^2 = f(x)$ دالة خطية معادلتها : $v^2 = b.x$ مع a يمثل المعامل الموجه للمنحنى ، نحصل باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $2.v.\frac{dv}{dt} = b.v$ و منه :

$$a = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta(v^2)}{\Delta(x)} = 2.5 m.s^{-2} \quad .$$

حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{2.5}{5.10^{-2}} = 50 rad.s^{-2}$.

2 – 2 – 1 – إحداثيي النقطة I :

حساب السرعة v_B

باستعمال المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ و $v(t)$ عند انتقال الجسم من A إلى B ، وإقصاء الزمن بينهما :

$$x_B - x_A = \frac{1}{2}at^2$$

$$v_B - v_A = at$$

$$V_B = \sqrt{2.a.x_B} = 2 m.s^{-1}$$

المعادلتين الزمنيتين :

بعد إقصاء الزمن $t=\frac{x}{V_B.\cos(\alpha)}$ $\begin{cases} x=V_B.\cos(\alpha).t \\ y=\frac{1}{2}.g.t^2+V_B.\sin(\alpha).t \end{cases}$

نحصل على معادلة المسار

$y=\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x^2+\tan(\alpha).x$ و منه : $y_I=h=\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2+\tan(\alpha).x_I$ و بالتالي نحصل على

معادلة من الدرجة الثانية : $\frac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2+\tan(\alpha).x_I-h=0$ التي يمكن كتباتها على الشكل التالي :

$1.66.x_I+0.577.x_I-1=0$ و أحد حلولها $x_I=0.62m$

إحداثيتي النقطة I $\begin{cases} x_I=0.62m \\ y_I=1m \end{cases}$

2 – 2 – 2 – السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

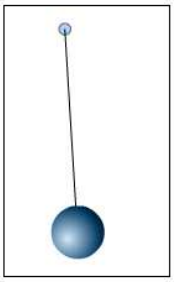
$\dot{\theta}_B=\dot{\theta}_M$ و التعويض نجد : $\frac{V_B}{r}=\frac{V_M}{L}$

و بالتالي : $\boxed{V_M=V_B\frac{L}{r}=8m.s^{-1}}$.

المجوعة الميكانيكية المتذبذبة
Système mecanique oscillant

I ـ تقديم مجموعات ميكانيكية متذبذبة

النواس الوازن


النواس البسيط

نواس اللي

النواس المرن

1 ـ تعريف بالمجموعة الميكانيكية المتذبذبة

المجموعة الميكانيكية هي مجموعة تنجز حركة دورية حول موضع توازنها المستقر

تذكير بتعريف الحركة الدورية : هي حركة تتكرر مماثلة لنفسها خلال مدد زمنية متساوية .

أ ـ النواس الوازن

النواس الوازن هو كل مجموعة غير قابلة للتشويه بإمكانها إنجاز حركة تذبذبية حول محور ثابت تحت تأثير وزنها .

مثال : رقاص ساعة جدارية :

عند حركة الرقاص ، يخضع إلى القوى التالية : $\vec{P}$ وزن الرقاص . $\vec{R}$ تأثير المحور (Δ) محور الدوران .

القوى التي لها مفعول على حركة الرقاص هي وزنه فقط ، بينما $\vec{R}$ ليس لها أي مفعول على حركة الرقاص .

ب ـ النواس البسيط

النواس البسط هو كل نقطة مادية تتأرجح على مسافة ثابتة من محور أفقي ثابت

عمليا للحصول على نواس بسيط نعلق جسم صغير كثافته جد عالية بطرف خيط كتلته مهملة وغير قابل الامتداد ونشد الطرف الآخر بحامل ثابت .

عند حركة النواس البسيط فهو يخضع للقوى التالية : $\vec{P}$ وزن الجسم و $\vec{F}$ تأثير الخيط على الجسم .

القوة الوحيدة التي لها مفعول على حركة النواس البسيط هي وزنه فقط ، بينما $\vec{F}$ خط تأثيرها يتقاطع مع محور الدوران وبالتالي ليس لها مفعول على حركته .

ملحوظة : أبعاد الجسم جد صغيرة أما طول الخيط $(r \ll \ell)$ يمكن اعتبار في هذه الحالة أن الجسم نقطيا والنواس البسيط متذبذبا ميكانيكيا مثاليا وحالة خاصة للنواس الوازن .

ج ـ نواس اللي

نواس اللي جهاز يتكون من سلك فلزي ثبت أحد طرفيه إلى حامل ، ومن قضيب متجانس معلق من مركز قصوره بالطرف الثاني للسلك .

عند إدارة القضيب أفقيا بزاوية θ حول المحور (Δ) المجسم بالسلك ، فإن السلك يلتوي ، فيسعى للعودة إلى حالته البدئية ،

وهي مزدوجة ارتداد Couple de rappel تقاوم التواء السلك وبالتالي تحدث حركة تذبذبية للقضيب حول موضع توازنه المستقر .

د ـ النواس المرن

يتكون النواس المرن من جسم صلب معلق بطرف نابض ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة الثاني للنابض مثبت بحامل ثابت .

عند تشويه النابض وتحريره نلاحظ أن ينجز حركة تذبذبية حول موضع توازنه المستقر ، تعزى هذه الحركة إلى القوة المطبقة من طرف النابض على الجسم والتي تتعلق بحالة النابض إذا كان مطالا أو مكبوسا أو مضغوطا إذ تقاوم هذه القوة تشوه النابض ، لذلك تسمى بقوة الارتداد .

2 ـ الحركة التذبذبية ومميزاتها .

2 ـ 1 تعريف

الحركة التذبذبية هي حركة دهاب وإياب حول موضع معين ، وهي حركة تميز المتذبذبات الميكانيكية
هناك ثلاثة أنواع للحركة التذبذبية :
ـــ الحركة التذبذبية الحرة : هي التي ينجزها متذبذب ميكانيكي دون اكتساب طاقة ما من المحيط الخارجي بعد إحداث حركته .
ـ الحركة التذبذبية المصانة : هي التي ينجزها المتذبذب وذلك بتعويض الطاقة المفقودة خلال التذبذبات بواسطة جهاز خارجي . مثال الساعة الحائطية .
الحركة التذبية القسرية : عندما تفرض مجموعة ميكانيكة تسمى بالمثير تردد لذبذبات على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان .

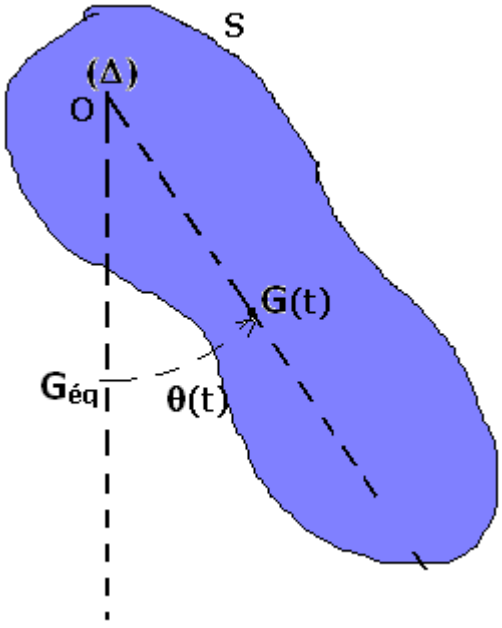
2 ـ 2 مميزات الحركة التذبذبية

أ ـ موضع التوازن المستقر

كل متذبذب ميكانيكي حر لا يمكنه أن ينجز حركته التذبذبية إلا حول موضع توازنه المستقر

ب ـ وسع الحركة

وسع الحركة لمتذبذب ميكانيكي حر وغير مخمد هو القيمة القصوى الموجبة التي يأخذها المقدار الذي يعبر عن مدى ابتعاد أو انحراف المتذبذب عن موضع توازنه المستقر .
بالنسبة للنواس الوازن والنواس البسيط ونواس اللي نستعمل الأفصول الزاوي θ .
بالنسبة للنواس المرن ، نستعمل الأفصول المنحني (حركة إزاحة مستقيمية)
مثال :

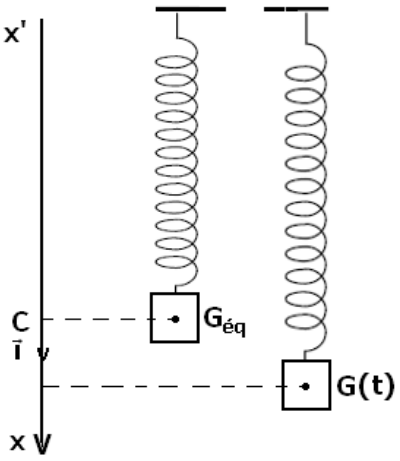


- **النواس الوازن**

عند إزاحة النواس الوازن عن موضع توازنه المستقر ، ثم نحرره ، ينجز ذبذبات حرة في المستوى الرأسي الذي يحتوي على الموضع البدئي وعلى موضع التوازن المستقر لمركز قصوره G .
الأفصول الزاوي لنواس وازن (أو بسيط) هو الزاوية الموجهة $\theta(t)$
بحيث :
$\theta(t)=\left(\overrightarrow{OG_{(eq)}},\overrightarrow{OG_{(t)}}\right)$ ، $G_{(éq)}$ موضع G عند التوازن المستقر
و $G_{(t)}$ هو موضع G عند اللحظة t .
أثناء الحركة يأخذ الأفصول الزاوي θ قيما موجبة وقيما سالبة .
وبإهمال الخمود بالنسبة للذبذبات الأولى ، يتغير θ بين قيمة قصوى θ_m وقيمة دنيا $(-\theta)$وتسمى القيمة المطلقة لهاتين القيمتين وسع الحركة للنواس الوازن الحر وغير المخمد .

- **النواس المرن**

عند إزاحة الجسم عن موضع توازنه المستقر وفق اتجاه محور النابض وتحريره ، فإنه ينجز حركة تذبذبية حرة حول هذا الموضع . نمعلم مواضع مركز قصور النواس المرن في المعلم $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ متعامد وممنظم محوره $\left(O,\vec{i}\right)$ رأسي وموجه نحو الأسفل بالأفصول $x(t)$ بحيث أن $\overrightarrow{G_{éq}G}=x(t)\vec{i}$
$G_{éq}$ موضع G عند التوازن المستقر .



أثنا الحركة الحرة وغير المخمدة للنواس ، تأخذ x قيما موجبة أكبرها x_m وقيما سالبة أصغرها $-x_m$ ، نسمي x_m وسع الحركة للنواس المرن .

ج ـ الدور الخاص

الدور الخاص T_0 لمتذبذب ميكانيكي حر وغير مخمد هو المدة الزمنية الفاصلة بين مرورين متتالين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحى ، وحدته في النظام العالي للوحدات هي الثانية (s)

2 ـ 3 خمود الذبذبات الميكانيكية

أ ـ ظاهرة الخمود

تجربة :

عند إزاحة متذبذب ميكانيكي (مثلا نواس وازن) عن موضع توازنه المستقر وتحريره ، فإنه ينجز ذبذبات حرة يتناقص وسعها تدريجيا مع الزمن ، إلى أن يتوقف عند موضع توازنه المستقر ، تسمى هذه الظاهرة ظاهرة الخمود الميكانيكي .

تعزى هذه الظاهرة إلى الاحتكاكات والتي يمكن تصنيفه إلى نوعين :

ـ احتكاكات صلبة والتي ينتج عنها خمود صلب للذبذبات .

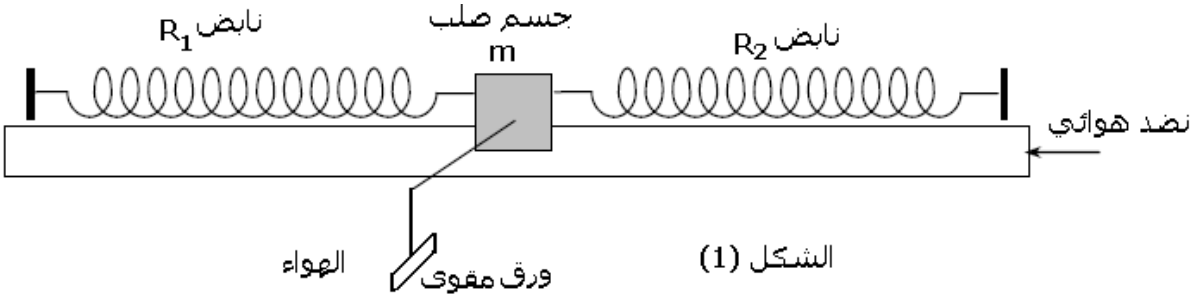
ـ احتكاكات مائعة والتي ينتج عنها خمود مائع للذبذبات .

ب ـ أنظمة خمود الذبذبات الميكانيكية .

الخمود بالاحتكاكات المائعة :

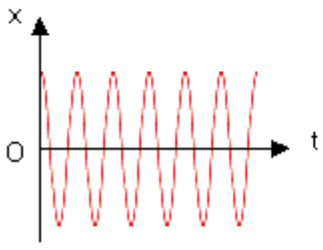
دراسة تجريبية :

ننجز التركيب التجريبي المبين في الشكل (1) حيث الخيال في حالة توازن فوق نضد هوائي أفقي ، بحيث يكون النابضان مطالين .

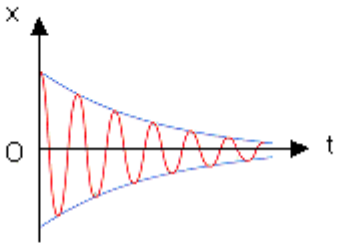


الشكل (1)

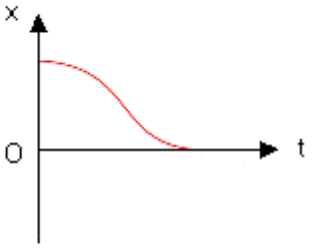
نشغل المعصفة ونزيح الخيال عن موضع توازنه ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية . فنحصل على الشكل (2) نثبت على الخيال قطعة من الورق المقوى ونعيد نفس التجربة فنحصل على المنحنى الشكل



احتكاكات منعدمة
الشكل (2)



احتكاكات ضعيفة
الشكل (3)



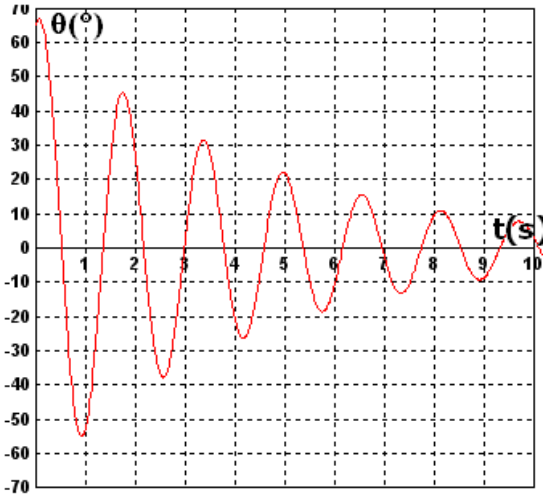
احتكاكات مهمة
الشكل(4)

1 ـ ما طبيعة ذبذبات الخيال عند تشغيل المعصفة مع إهمال الاحتكاكات .

2 ـ حدد صنف الخمود ونظام اشتغال المتذبذب في كل حالة .
3
خلاصة :
ـ حالة الخمود الضعيف : النظام شبه الدوري .
في هذه الحالة ينجز المتذبذب الميكانيكي
موضع توازنه المستقر .
كما أنه في هذه الحالة أن حركة المتذبذب ليست دورية نقول إنها شبه دورية ودورها
الخاص T_0 للمتذبذب . عموما $(T_0 < T)$. نسمي T شبه الدور .

شبه الدور بالنسبة لمتذبذب ميكانيكي خموده ضعيف هو المدة الزمنية
مرورين متتاليين للمتذبذب من موضع توازنه المستقر في نفس المنحى .
ملحوظة : كلما كان خمود المتذبذب ضعيفا ، كلما تناهى شبه الدور T نحو الدور الخاص T_0 .
كلما صار الخمود مهما ، كلما تناقص وسع الحركة بشدة إلى أن ينعدم خلال فترة زمنية وجيزة
ب ـ حالة الخمود الحاد : النظام اللادوري .
في هذه الحالة تكون حركة المتذبذب غير دورية ، نقول أنها لا دورية
على الحالات التالية :
ـ النظام تحت الحرج : ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل أن يتوقف .
ـ النظام الحرج : حيث يعود المتذبذب إلى موضع توازنه المستقر دون أن يتذبذب .
ـ النظام فوق الحرج :
يتذبذب .
ملحوظة : لصيانة حركة تذبذبية نوظف بعض الأجهزة الميكانيكة تكمن وظيفتها في تعو
المبددة في كل دور . مثال : صيانة ذبذبات شفرة هزاز بواسطة كهرمغنطيس .

ج ـ الخمود بالاحتكاكات الصلبة
مثال النواس الوازن
تكون الاحتكاكات على مستوى محور الدوران " الصلبة " تكون
في هذه الحالة ذبذبات النواس شبه دورية ويتناقص وسعها
بكيفية خطية . ويساوي شبه الدور للذبذبات الدور الخاص
للمتذبذب إذا كان حرا وغير مخمد .



II ـ دراسة ذبذبات المجموعة { جسم صلب ـ نابض }

1 ـ قوة الارتداد التي يطبقها نابض .

الدراسة التجريبية :
نعلق بالحامل نابضا ذا صلابة k ، طوله الأصلي ℓ_0
نعلق بالطرف A لنابض كتلة معلمة m ، فيطال النابض حيث
يصبح طوله ℓ بحيث ينتقل طرفه الحر بالمسافة $A_0A_{éq}$

1 ـ ذكر بالطريقة العملية لتعيين صلابة النابض .
2 ـ أعط بدلالة k, ℓ_0, ℓ ، تعبير شدة القوة المطبقة من طرف النابض على الكتلة المعلمة ، واستنتج
تعبير $\vec{F}$ بدلالة k والمتجهة $\overrightarrow{A_0A_{éq}}$.

نعتبر نواسا مرنا في وضع أفقي ، عندما يكون النابض حرا تحتل نقطة تماسه مع الجسم الموضع A_0 ،
تكون في هذه الحالة A_0 و $A_{éq}$ متطابقتين .
عندما يكون النابض مطالا (مضغوطا) تحتل هذه النقطة الموضع A .

1 ـ 1 القوى المطبقة على الجسم
$\vec{P}$ وزن الجسم و $\vec{R}$ تأثير السطح على الجسم (غياب الاحتكاك) ، $\vec{F}$ القوة المطبقة من طرف النابض
على الجسم وهي قوة ارتداد تسعى إلى إرجاع الجسم إلى موضعه البدئي .

1 ـ 2 مميزات قوة الارتداد

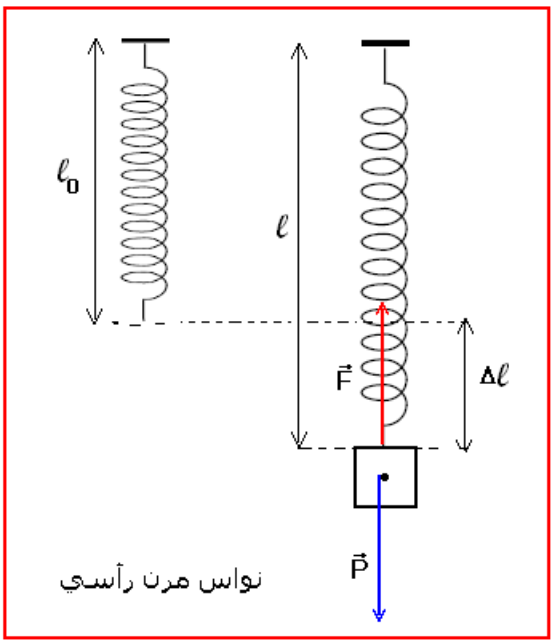
نقطة التأثير : نقطة التماس الجسم والنابض .

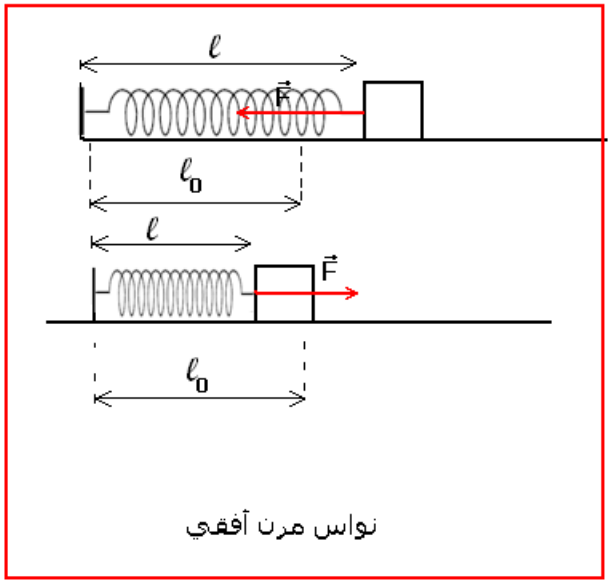
خط التأثير : محور النابض

المنحى : موجه نحو داخل النابض في حالة النابض مطالا ، أو خارجه في حالة النابض مضغوط .

الشدة : $F = k\Delta\ell = k\left(\ell - \ell_0\right)$ حيث k صلابة النابض و $\Delta\ell$ إطالته بالمتر و ℓ_0 طوله البدئي ، ℓ طوله النهائي .

يمكن أن نقرن بإطالة النابض $\Delta\ell$ المتجهة $\overrightarrow{A_0A}$ وهي متجهة انتقال النقطة A بحيث أن $\vec{F} = -k\overrightarrow{A_0A}$.



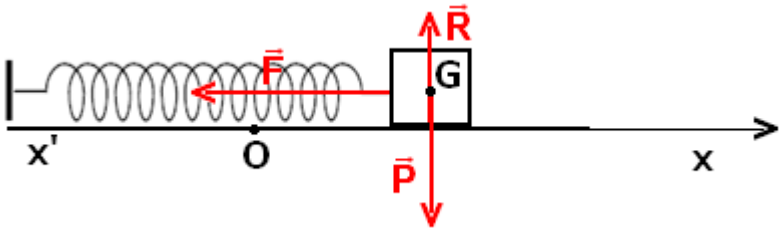


2 ـ المعادلة التفاضلية

نعتبر نواسا أفقيا بحيث ينجز الجسم الصلب (S) ذبذبات حرة وغير مخمدة .

نعلم G مركز قصور الجسم الصلب بالأفصول x في معلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O,\vec{i})$ أفقي يطابق أصله G_0 موضع G عند التوازن : $\overrightarrow{OG} = x\vec{i}$.

المعلم $\mathcal{R}$ مرتبط بمرجع أرضي باعتباره غاليليا حيث نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (S) أثناء حركته .



المجموعة المدروسة : الجسم (S) ذو كتلة m .

القوى المطبقة على الجسم : $\vec{P}$ وزنه و $\vec{R}$ تأثير المستوى الأفقي على الجسم و $\vec{F}$ قوة الارتداد التي يطبقها النابض على الجسم بحيث أن $\vec{F} = -k\overrightarrow{A_0A}$. بما أن الجسم في حركة إزاحة $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{G_0G}$

ومنه فإن $\vec{F} = -kx\vec{i}$

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}$

لدينا $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ لغياب الحركة على المحور $(O,\vec{j})$ وبالتالي $\vec{F}=m.\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$: $F=-kx\vec{i}$ بحيث أن x موضع G عند اللحظة t أي أن $-kx\vec{i}=\ddot{x}\vec{i}$.

نستنتج المعادلة التفاضلية من العلاقة السابقة : $kx+m\ddot{x}=0\Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$

العلاقة : $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$ تمثل المعادلة التفاضلية للنواس المرن .

ملحوظة : نفس المعادلة يمكن التوصل إليها بالنسبة للنواس المرن الرأسي . أنظر التمرين التطبيقي 1

3 ـ حل المعادلة التفاضلية :

لدينا معادلة تفاضلية خطية حلها بصفة عامة هو على الشكل التالي : $x(t)=x_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ حيث :

$(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$: طور التذبذبات عند اللحظة t وحدته rad .

φ طور الذبذبات عند اللحظة t=0 نعبر عنه ب rad .

x_m وسع الحركة بالمتر (m)

T_0 الدور الخاص للذبذبات ب s

طبيعة حركة مركز القصور G للجسم مستقيمية جيبية دالتها الزمنية هي : $x(t)=x_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

ـ تحدد قيمتي x_m و φ انطلاقا من الشروط البدئية .

ـ لدينا : $-1\le\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\le+1\Rightarrow -x_m\le x(t)\le+x_m$

4 ـ تعبير الدور الخاص

يحدد تعبير الدور الخاص انطلاقا من المعادلة التفاضلية بحيث نبحث عن الشرط الذي ينبغي توفره لكي تكون الدالة $x(t)=x_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة :

لدينا $\dot{x}(t)=-\frac{2\pi}{T_0}x_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ و كذلك $\ddot{x}(t)=-\frac{4\pi^2}{T_0^2}x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)+\frac{k}{m}x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)=0$$

$$x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\left(\frac{k}{m}-\frac{4\pi^2}{T_0^2}\right)=0$$

$\left(\frac{k}{m}-\frac{4\pi^2}{T_0^2}\right)=0\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ مهما كانت t أي أن

بحيث أن T_0 الدور الخاص للنواس المرن

m كتلة الجسم (S) ب kg و k صلابة النابض ب (N/m)

نعبر كذلك عن التردد الخاص للذبذبات بالعلاقة التالية : $f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

وحدة التردد في النظام العالمي للوحدات هي الهرتز . (Hz)

دراسة تجريبية : التحقق من العلاقة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

نعلق كتلة معلمة بنابض ، ونمعلم موضع النقطة A عند التوازن $A_{éq}$.

نزيح الكتلة المعلمة رأسيا نحو الأسفل بالوسع x_m ونحررها بدون سرعة بدئية . بواسطة ميقت يدوي نقيس مدة 10 ذبذبات .

نعيد التجربة 3 مرات بحيث في كل مرة قيمة x_m .

نعيد التجربة 3 مرات مع تغيير الكتلة في كل مرة مع الاحتفاظ بنفس النابض .

نعيد التجربة 3 مرات مع تغيير النابض في كل مرة واستعمال نفس الكتلة المعلمة .

1 ـ لماذا لا نقيس مباشرة ذبذبة واحدة ؟ هل يتعلق الدور الخاص بوسع الحركة ؟

2 ـ ما تأثير كل من كتلة الجسم المعلق و صلابة النابض على الدور الخاص ؟

3 ـ هل هذه النتيجة تتوافق مع العلاقة التي تم التوصل إليها في الدراسة النظرية ؟

III ـ دراسة ذبذبات نواس اللي

1 ـ مزدوجة الارتداد المطبقة من طرف سلك اللي .

عند تطبيق مزدوجة قوتين على قضيب معلق بسلك ، فإن هذا الأخير يلتوي . وعند حذف المزدوجتين ، يعود السلك إلى موضع توازنه بفعل قوة الارتداد التي تطبقها مولدات السلك على القضيب وموجوع هذه القوى يكون مزدوجة تسمى بمزدوجة اللي ونرمز لها ب $\mathcal{M}_C$.

عزم هذه المزدوجة مستقل عن المحور ونعبر عنه بالعلاقة التالية : $\mathcal{M}_C = -C.\theta$

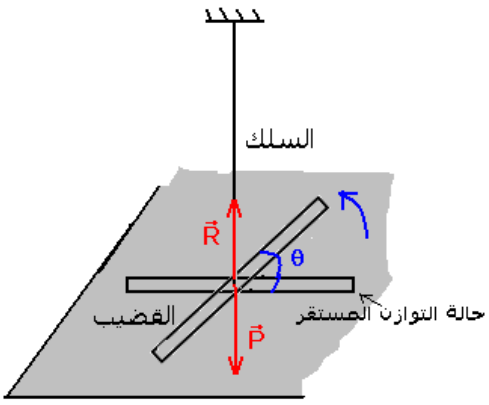
بحيث أن C ثابتة لي السلك وحدتها هي $N.m.rad^{-1}$ و θ زاوية اللي ب rad

تتعلق ثابتة اللي بطول السلك وبمقطعه وبنوعيته .

2 ـ المعادلة التفاضلية لحركة الجسم الصلب وحلها .

نعتبر نواس اللي في توازنه المستقر . ندير القضيب عن موضع توازنه بالزاوية θ_m ، ونحرره بدون سرعة بدئية ، فينجز القضيب حركة تذبذبية حرة حول موضع توازنه المستقر .

نعتبر الاحتكاكات مهملة . J_Δ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) المجسد بالسلك . و C ثابتة اللي للسلك.



ندرس حركة القضيب في مرجع مرتبط بالأرض والذي نعتبره مرجعا غاليليا ، ونمعلم موضع القضيب بأفصوله الزاوي θ والذي نقيسه بالنسبة لاتجاه مرجعي وهو اتجاه القضيب عند التوازن .

جرد القوى المطبقة على القضيب : $\vec{P}$ وزن القضيب ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القضيب ، ومزدوجة اللي وعزمها هو $\mathcal{M}_C = -C.\theta$.

تطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على القضيب:

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{R}\right) + \mathcal{M}_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ متطبقان لمحور الدوران فمفعولهما علة دوران القضيب منعدم أي أن عزمهما منعدم .

$$\mathcal{M}_C = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لحركة القضيب هي : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$

حل المعادلة التفاضلية :

المعادلة التفاضلية شبيهة من ناحية الشكل بالمعادلة التفاضلية التي تم التوصل إليها بالنسبة للنواس المرن وقياسا على ذلك فإن حلها سيكون على الشكل التالي : $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

θ_m و φ تتعلقان بالشروط البدئية للحركة .

3 ـ الدور الخاص :

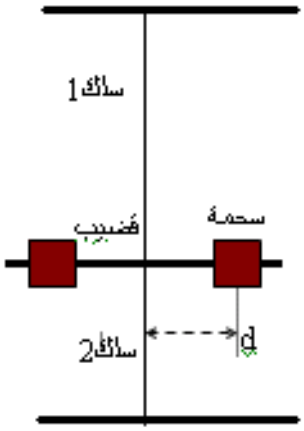
بتعويض حل المحصل عليه في المعادلة التفاضلية نحصل على الدور الخاص للنواس اللي الحر وهو على الشكل التالي :

$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب (الجسم الصلب) بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه $kg.m^2$ و

C ثابتة اللي للسلك نعبر عنها $N.m.rad^{-1}$.

التردد الخاص لنواس اللي هو : $f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

دراسة تجريبية : التحقق التجريبي من العلاقة $T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$



الجهاز التجريبي

ننجز التركيب التجريبي الممثل في الشكل جانبه والمتكون من سلكين ثلبتة ليهما على التوالي C_1 و C_2 بحيث أن ثابتة اللي المكافئة للسلكين هي

$C=C_1+C_2$

ونعلم أن ثابتة اللي تتعلق بطول السلك ℓ وهي تتناسب عكسيا مع الطول ℓ

قضيب معدني متجانس يحمل في طرفيه سحمتين كتلة كل واحدة منهما هي m عزم قصوره هو $J'_\Delta=J_\Delta+2md^2$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب

نزيح القضيب عن موضع توازنه بالزاوية θ_m ونطلقه بدون سرعة بدئية .

نلاحظ : ينجز القضيب حركة تذبذبية دورانية حول موضع توازنه في المستوى المتعامد مع القضيب

1 ـ تأثير عزم قصور القضب

تجربة : نأخذ سلك ثابتة ليه C ونغير عزم قصوره J'_Δ

$J'_\Delta=J_\Delta+2md^2$

J_Δ عزم قصور القضيب . m كتلة السحمة أو الجسم المثبت على القضيب

d المسافة بين المحور (Δ) والسحمة .

نغير المسافة d ونقيس الدور الخاص T_0 بواسطة خلية كهر ضوئية مرتبطة بميقات إلكتروني .

نقارن قيم T_0 و J'_Δ ماذا نلاحظ ؟

كلما ازدادت d ازدادت كذلك T_0 أي كلما ازدادت J'_Δ ازدادت T_0

استنتاج : J'_Δ و T_0 يتناسبان أطرادا .

$$T_0=k\sqrt{J'_\Delta}$$

2 ـ تأثير ثابتة اللي للسلك .

نثبت عزم قصور القضيب J'_Δ ونغير السلك ـ طوله أو طبيعته ـ

نقارن قيم T_0 و C ماذا نلاحظ ؟

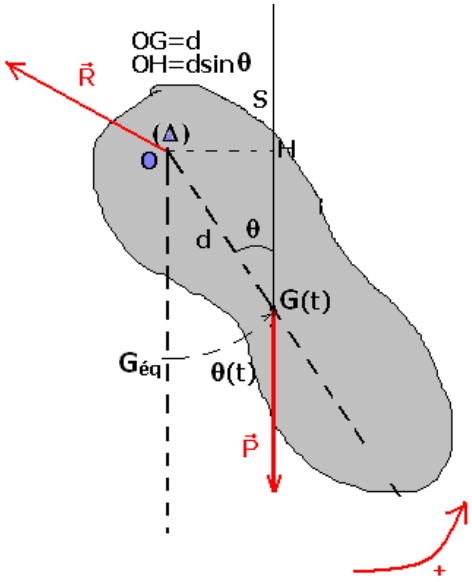
نلاحظ : أنه كلما ازدادت ثابتة اللي للسلك يتناقص الدور الخاص T_0

أي أن T_0 و C يتناسبان عكسيا والدراسة الكمية تبين أن : $T_0 = \frac{k'}{\sqrt{C}}$

3

IV ـ دراسة ذبذبات النواس الوازن .

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وحلها .



المجموعة المدروسة : الجسم (S) كتلته m وعزم قصوره بالنسبة لمحور الدوران (Δ) الأفقي J_Δ .

المعلم : مرتبط بالأرض، المرجع الأرضي ونعتبره غاليليا .

في كل لحظة نمعلم موضع النواس G بالأفصول الزاوي $\theta(t)$

جرد القوى المطبقة على المجموعة :

ـ وزنها $\vec{P}$

ـ تأثير المحور (Δ) على المجموعة $\vec{R}$.

نطبق العلاقة الأساية للتحريك على المجموعة في حالة الدوران حول المحور (Δ) : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

بما أن خط تأثير القوة $\vec{R}$ يتقاطع مع محور الدوران (Δ) فإن عزمها منعدم بالنسبة لهذا المحور : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

وبالتالي : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$

لدينا : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgd\sin\theta$ أي أن (1) $-mgd\sin\theta = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0$

العلاقة التي تم التوصل إليها هي المعادلة التفاضلية لحركة النواس الوازن وهي غير خطية وبالتالي فحلها ليس جيبيا .

حالة الذبذبات ذات وسع صغير .

تعتبر الذبذبات ذات وسع صغير إذا كانت $\theta \le 15°$ بعني أن $\theta \le 0,26rad$ في هذه الحالة تكون $\sin\theta \approx \theta$ وتصبح المعادلة التفاضلية (2) $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$

قياسا مع ما سبق نقبل أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو على الشكل التالي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

2 ـ الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير .

الدور الخاص لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة وغير مخمدة وذات وسع صغير:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

J_Δ عزم قصور الجسم بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب $(kg.m^2)$

d المسافة الفاصلة بين المحور (Δ) ومركز قصور المجموعة المتذبذبة . ب (m)

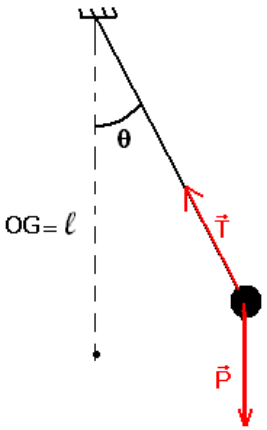
m كتلة المجموعة ونعبر عنها ب (kg)

g شدة الثقالة $\left(m/s^2\right)$.

تعبير التردد الخاص f_0 لنواس وازن ينجز ذبذبات حرة غير مخمدة وذات وسع صغير : $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$

3 ـ النواس البسيط

النواس البسيط هو نموذج مثالي للمتذبذب ميكانيكي . وهو حالة خاصة للنواس الوازن حيث : $d=\ell$ و $J_\Delta=m\ell^2$. في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :



$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

وتقبل هذه المعادلة كحلا لها : $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ وتمثل المعادلة الزمنية لحركة النواس البسيط .

تعبير الدور الخاص للنواس البسيط : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ حيث ℓ طول النواس البسيط ب (m) و g شدة مجال الثقالة $\left(m/s^2\right)$.

طول النواس البسيط المتواقت مع النواس البسيط :

نقول أن النواس البسيط متواقت مع النواس الوازن إذا كان لهما نفس الدور

أي أن دور النواس البسيط =دور النواس الوازن .

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}\Rightarrow\ell=\frac{J_\Delta}{md}$$

V ـ ظاهرة الرنين الميكانيكي

1 ـ الذبذبات القسرية

في الواقع تؤثر الاحتكاكات على حركة المتذبذبات الميكانيكية والتي تؤدي إلى خمود حركتها مع الزمن في حالة ما لم يتم تعويض الطاقة المفقودة من طرف المحيط الخارجي . عكس ذلك تكون حركة المتذبذب مصانة . للحصول على هذا النوع من الذبذبات يتم تجميع المتذبذب الميكانيكي مع جهاز يمنحه الطاقة اللازمة . يسمى هذا الأخير بالمثير وهو مجوعة ذات حركة جيبية تفرض دورها T_e على المجموعة المتذبذبة والتي تسمى بالرنان ، فتصبح هذه الأخيرة تنجز ذبذبات قسرية دورها $T_0=T_e$.

2 ـ تمرين تجريبي (بكالوريا فرنسية يونيو 2003 Ile de La Réunion) بتصرف

ننمذج النوابض أو المخمدات (les amortisseurs) التي تحمل السيارة بنابض ذي لفات غير متصلة كتلته مهملة وصلابته $K=40N/m$ (القيمة المشار إليها من طرف الصانع)

I ـ دراسة حالة التوازن

للتأكد من قيمة صلابة النابض ، نقيس الطول الأصلي للنابض $\ell_0=10,0cm$ ، ثم ، في تجربة أخرى نعلق بطرفه الحر جسم كتلته $m=100g$ ، فيصبح طول النابض النهائي $\ell=12,4cm$. نعطي $g=10m/s^2$.

1 ـ 1 أحسب صلابة النابض K' .

دراسة توازن الجسم المعلق بالنابض :

جرد القوى المطبقة على الجسم : $\vec{P}$ وزن الجسم ، $\vec{F}$ توتر النابض

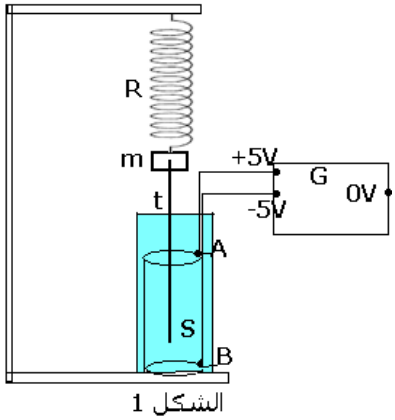
نطبق شرطا التوازن بالنسبة لجسم خاضع لقوتين وفي حالة توازن أن لهتين القوتين نفس الشدة

$F=P\Rightarrow mg=K\Delta\ell$ وبالتالي فإن $K=\frac{mg}{\Delta\ell}=42N/m$

2 ـ 1 المشار K إليه من طرف الصانع .

نذكر بأن الخطأ النسبي لمقدار X هو $\frac{X_{\exp} - X_{th}}{X_{th}}$

حسب العلاقة الخطأ النسبي هو : $\frac{42-40}{42} = 0,05 = 5\%$



الشكل 1

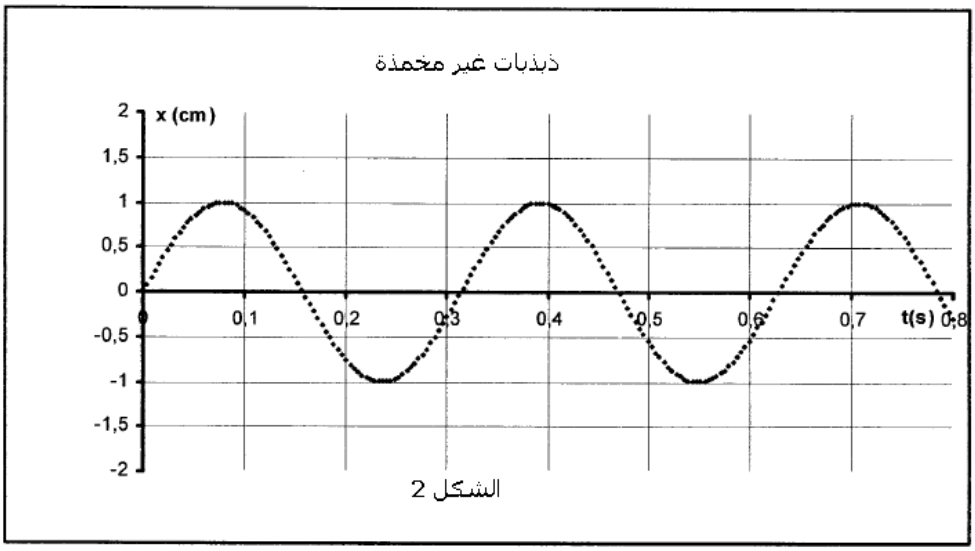
II ـ الدراسة التحريكية

لدراسة حركة المجموعة { النابض + الجسم } نستعمل المجموعة الممثلة في الشكل (1) والتي تتكون من إلكترودين A و B ، مثبتين في محلول S ، ومرتبطين بالقطبين $(+5V, -5V)$ لمولد التوتر المستمر .

قضيب فلزي t مكسوا كليا بعازل ومثبت بكتلة معلمة m . طرفه E يتبع حركة الكتلة المعلمة m .

يمكّن قياس التوتر بين النقطة O والقطب $0V$ للمولد من كشف موضع النقطة E . مما يمكن كذلك من معرفة موضع الكتلة m خلال الحركة التذبذبية .

هذه المجموعة مرتبطة بجهاز يستقبل المعطيات وبواسطة برنم ملائم يمكن معالجتها للحصول على منحنى تغيرات الأفصول x للكتلة m بدلالة الزمن t وذلك بعد أن إزاحة الكتلة m عن موضع توازنها نحو الأسفل ب $1cm$ وتحريرها بدون سرعة بدئية . حيث نحصل على ذبذبات حرة وغير مخمدة . أنظر الشكل 2 .



الشكل 2

1 ـ حدد الدور الخاص لحركة المتذبذب . هل هذه القيمة توافق القيمة النظرية للدور الخاص ؟ من خلال المبيان نحصل على القيمة التجريبية للدور اللخاص للمتذبذب المرن $T_{0\exp} = 0,33s$.

حساب القيمة النظرية للدور الخاص : $T_{0th} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,314s$ تتوفق مع القيمة التجريبية .

2 ـ باستعمال معادلة الأبعاد ، بين أن وحدة الدور الخاص هي الثانية.

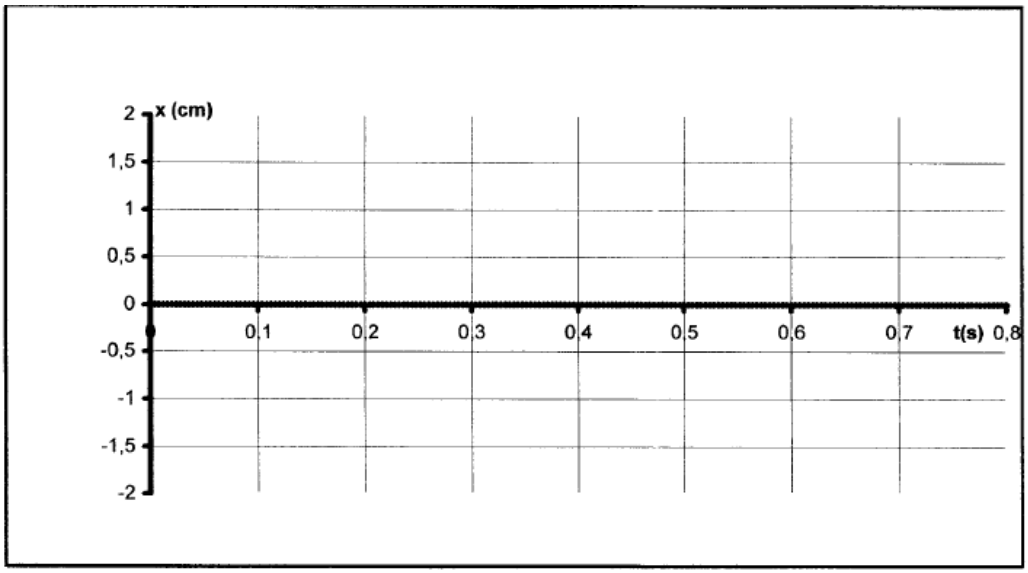
نعلم أن $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ بدون وحدة و وحدة الكتلة هي kg و وحدة صلابة النابض N/m

وأن النيوتن هو $kg.m/s^2$

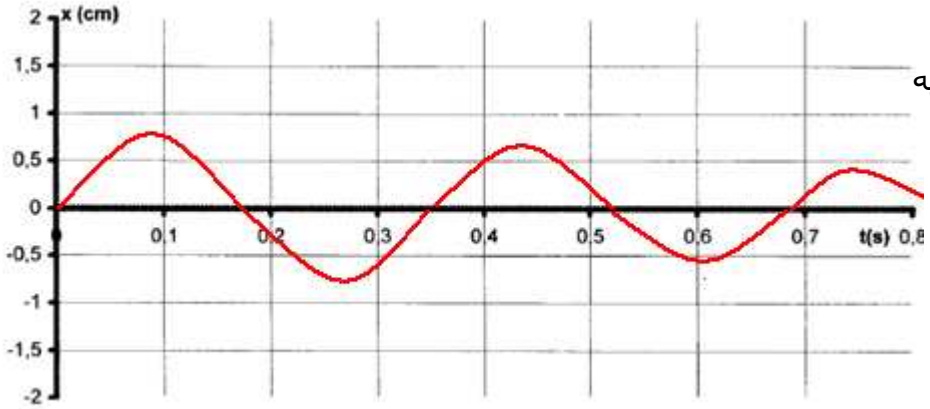
تكتب معادلة الأبعاد للدور الخاص T_0 على الشكل التالي :

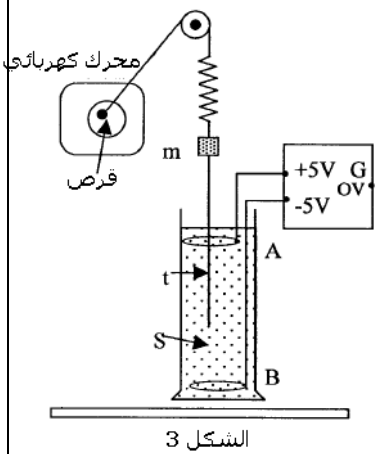
$$[T_0]=\left(\frac{[M].[L].[T]^2}{[M].[L]}\right)^{1/2}=[T]$$ أي أن وحدة الدور الخاص هي الثانية (s) .

3 ـ نعوض المحلول (S) بمحلول آخر لزوجته أكبر . خط شكل المنحنى المحصل علية في هذه الحالة .



شكل المنحنى المحصل عليه :





الشكل 3

III ـ دراسة ذبذبات قسرية

ننجز التركيب التجريبي التالي الشكل 3 ، حيث بواسطة خيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة يمر من مجرى بكرة مثبتة ، نربط طرف النابض بمحرك كهربائي يحدث لقرص حركة دوران منتظم حول محور ثابت . عند تشغيل المحرك يحدث الجهاز { المحرك ، القرص ، الخيط } للنواس المرن حركة تذبذبية ترددها يتناسب اطرادا مع سرعة دوران القرص . ننجز عدة تسجيلات لمختلف سرعات دوران القرص المرتبط بالمحرك حيث تردده f بالهرتز .

ونسجل تغيرات وسع كل تسجيل بدلالة التردد f فنحصل على الجدول التالي :

$f\,(Hz)$	1,5	2	2,5	2,8	3,1	3,2	3,3	3,6	4	4,5
$x_{\max}\,(cm)$	0,4	0,6	1	1,5	2,1	2,3	2	1,5	1	0,7

1 ـ حدد من خلال هذه التجربة المجموعة التي تلعب دور المثير

والمجموعة التي تلعب دور الرنان .

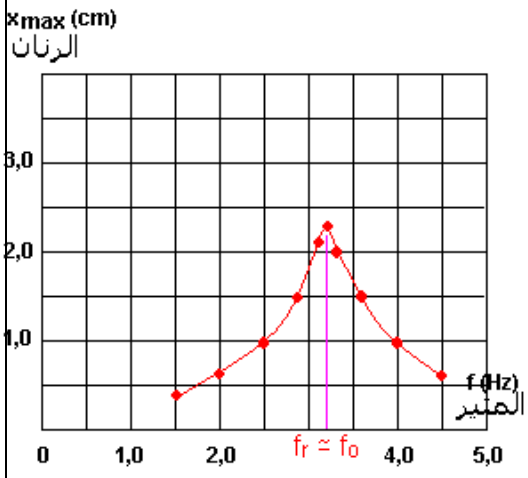
تنجز مجموعة ميكانيكية ذبذبات قسرية عندما يفرض مثير دوره على هذه المجموعة التي تسمى بالرنان

2 ـ مثل على ورق مليمتري $x_m = g(f)$ باستعمال السلم : $1cm \leftrightarrow 0,5Hz$ و $1cm \leftrightarrow 0,5cm$

3 ـ ما اسم الظاهرة المحصلة عند $f = 3,2Hz$ ؟ استنتج في هذه الحالة دور الذبذبات .

4 ـ قارن هذا الدور مع دور الذبذبات الحرة غير المخمدة .

5 ـ ما التغيرات الملاحظة عند استعمال محلول (S) ذي لزوجة أكبر ؟



عندما نستعمل محلول لزوجته أكبر ستزداد الاحتكاكات وبالتالي سيتناقص وسع الذبذبات وكذلك دورها عند الرنين .

تأثير الخمود على الرنين :

في حالة الخمود الضعيف للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة كبيرة ، نقول أن الرنين حادا .

في حالة الخمود القوي للرنان ، يأخذ وسع الذبذبات القسرية عند الرنين قيمة صغير ، نقول إن الرنين ضبابي

IV ـ المجموعة معاليق السيارة

تتكون المجموعة معاليق السيارة من نوابض ومخمدات . تكون السيارة المجموعة المتذبذبة ترددها الخاص f_0 .

تحدث الرياح على رمال الصحراء ممرات متموجة تسمى بالمطالة المتموجة فهي تحتوي على حدبات متتالية ومنتظمة تفصل بينها مسافة L (بعض العشرات من السنتيمترات) بالنسبة لسرعة v_R ، تخضع السيارة لذبذبات ذات وسع قوي والتي يجب تجنبها حتى لا يتم إتلاف السيارة .

1 ـ فسر هذه الظاهرة موضحا دور الممرات المتموجة .

ننمذج معاليق السيارة بمتذبذب ميكانيكي تردد الخاص f_0 له دور الرنان ، عند مرورها من تموجات أو حدبات مم

المثير في حالة هذا التردد يساوي تردد الرنان f_0 ستكون عندنا ظاهرة الرنين وبالتالي ستتلف السيارة

2 ـ عبر عن السرعة v_R بدلالة f_0 و L .

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرور السيارة من حدبتين هي $\Delta t = \dfrac{L}{v_R}$ وهي تمثل دور المثير أي أن

تردده هو : $f_e = \dfrac{1}{T_e} = \dfrac{v_R}{L}$ بما أنه عند الرنين $f_e = f_0$ فإن $v_R = L.f_0$.

تطبيق عددي : $v_R = 14,4km/h$

المجموعة الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة
تمارين

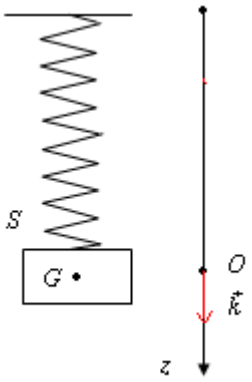
تمرين 1

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر نواسا مرنا رأسيا مكونا من :

ـ نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته K=40N/m مثبت بحامل .

ـ جسم صلب S كتلته m=100g ومركزه G مثبت بالطرف الحر للنابض



1 ـ أوجد إطالة النابض $\Delta\ell$ عند التوازن بدلالة g,K,m واحسب $\Delta\ell$

2 ـ نزيح الجسم S رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع المعلم الفضاء Oz ،

بمسافة $Z_m=4cm$ ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة نختارها كأصل للتواريخ .

2 ـ 1 أوجد باعتمادك على الدراسة التحريكية المعادلة التفاضلية المميزة للحركة واستنتج طبيعتها .

2 ـ 2 أكتب المعادلة الزمنية للحركة z=f(t) .

2 ـ 3 بين أن سرعة الجسم S لحظة مروره أول مرة من موضع توازنه تكتب

$$V_1 = -Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$$

أحسب V_1 .

3 ـ ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحى $\vec{k}$. أوجد تعبير المعادلة الزمنية z=f(t) لحركة S في المعلم Oz . نختار لحظة انفصال S عن النابض كأصل للتواريخ .

تمرين 2

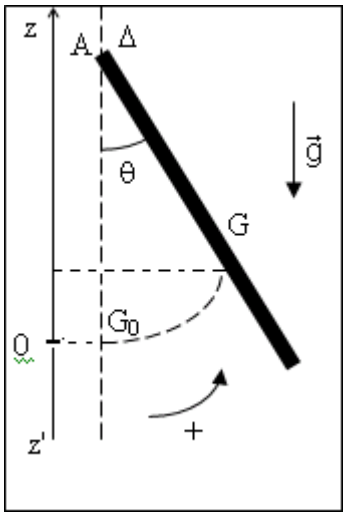
نعتبر مجموعة (S) مكونة من كرة متجانسة شعاعها R وكتلتها $m=100g$ ومن ساق متجانسة لها نفس المتلة وطولها $\ell=10R$ طرفها الأسفل ملحم بالكرة عند النقطة A . المجموعة (S) قابلة للدوران حول محور (Δ) أفقي وثابت . عزم قصور المجموعة (S) بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta=10^{-2}kg.m^2$.

نزيح المجموعة عن موضع توازنها المستقر بزاوية $\theta_m=10°$ ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة $t=0$. نعتبر الاحتكاكات مهملة .

1 ـ اوجد المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S) .

2 ـ حدد طبيعة الحركة ودورها الخاص واكتب المعادلة الزمنية لحركتها .

نعطي : R=2.5cm, $g=9.8m/s^2$



3 ـ أعط بدلالة الزمن ، تعبير الطاقة الحركية للمجموعة (S) وحدد قيمتها القصوية.

4 ـ أستنتج بدلالة الزمن ، تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة (S).

تمرين 3

نعتبر ساقا متجانسة AB كتلتها M=0,25Kg وطولها L=0,6m ومركز قصورها G ، بإمكانها الدوران في مجال الثقالة حول محور Δ أفقي ثابت يمر من طرفها A . نعلم موضع مركز قصور الساق في كل لحظة بالأفصول الزاوي θ (t) .

ونعطي عزم قصور الساق بالنسبة للمحور Δ

$$J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$$ و $g= 10m/s^2$

نهمل جميع الاحتكاكات خلال هذه الدراسة.

I ـ الدراسة التحريكية.

نزيح الساق عن موضع توازنها بزاوية θ_m في المنحى الموجب ثم نحررها بدون سرعة بدئية عند اللحظة t=0

1 ـ أوجد تعبير المعادلة التفاضلية لحركة الساق. ما هي طبيعة الحركة ؟

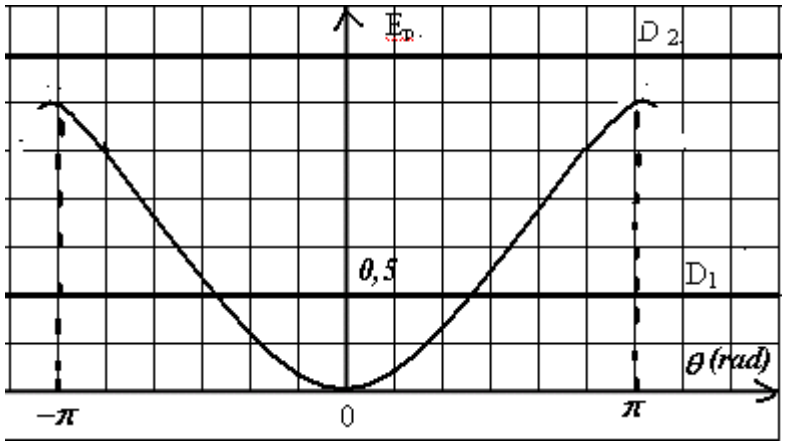
2 ـ أوجد حل للمعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{30} rad$

3 ـ أحسب قيمة الدور T_0.

II ـ الدراسة الطاقية

يمثل الشكل جانبه تغيرات طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة الزاوية θ . نعتبر المستوى الأفقي المار من G_0 مرجعا لطاقة الوضع الثقالية .

1 ـ بين أن طاقة الوضع للساق يمكن أن نعبر عنها بالعلاقة التالية : $E_p = MgL\frac{(1-\cos\theta)}{2}$



خلال حركة الساق حول المحور Δ يمكن إعطاء قيمتين للطاقة الميكانيكية والمتمثلتين في الشكل بالمستقيمين D_1 وD_2.

الحالة الأولى: يمثل D_1 الطاقة الميكانيكية للمجموعة.

أ ـ عين السرعة الزاوية للساق أثناء مرورها بموضع التوازن في المنحى الموجب.

ب ـ عين من خلال المنحنى موضع أو مواضع الساق التي تكون فيها قيمة الطاقة الحركية E_C = 0, 25J

الحالة الثانية : يمثل D_2 الطاقة الميكانيكية الجديدة للمجموعة . ما هو شكل مسار مركز القصور G للساق ؟ علل الجواب .

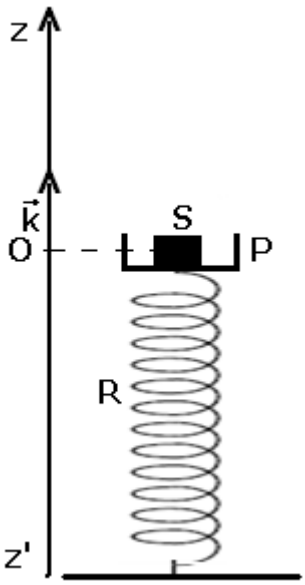
أحسب القيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}_1$ للساق وقيمتها القصوية $\dot{\theta}_2$ حينما تدور في المنحى الموجب

تمرين 4

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 m/s^2$.

يمثل الشكل جانبه جسم (S) نعتبره كنقطة مادية كتلته $m_1 = 100g$ موضوع على كفة P ذات سمك صغير جدا وكتلتها $m_2 = 200g$. نثبت عند مركزها O طرف نابض R ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة ، صلابته $k = 300N/m$ يوجد في وضع رأسي الطرف الأخر مثبت على مستوى أفقي ثابت .

توجد المجموعة في حالة توازن حيث ينتمي مركز قصورها G إلى نفس الخط الأفقي المار من O أصل معلم ثابت $(O, \vec{k})$.



1 ـ أوجد الانضغاط $|\Delta\ell|$ للنابض بدلالة m_1 و m_2 و g و k . أحسب $|\Delta\ell|$.

2 ـ عند اللحظة $t=0$ نقوم بضغط المجموعة $\{S,P\}$ نحو الأسفل ب $0,2m$ وذلك بإعطائها سرعة بدئية $\vec{v}_0$ موجهة نحو الأسفل وقيمته $v_0=1,2m/s$ ، فنحصل على حركة تذبذبية رأسية .

2 ـ 1 بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على المجموعة $\{S,P\}$ ، اوجد المعادلة التفاضلية لحركة G .

2 ـ 2 تقبل المعادلة التفاضلية حلا لها $z(t)=z_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ ، استنتج الدور الخاص للحركة وحدد z_m و φ .

3 ـ الدراسة الطاقية

نختار أصل المعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية $(E_{pp}=0)$ وطاقة الوضع المرنة $(E_{pe}=0)$.

3 ـ 1 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة واستنتج المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب .

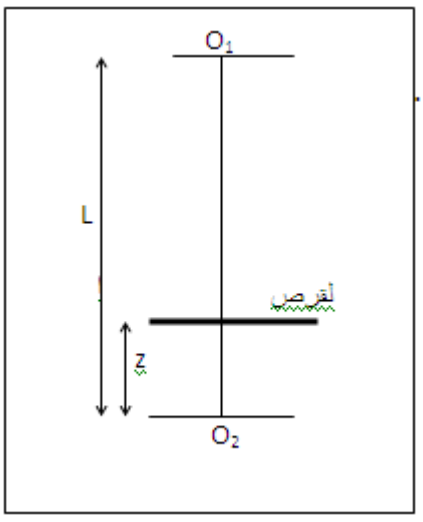
3 ـ 2 أحسب السرعة v عند مرور المجموعة $\{S,P\}$ من النقطة O لأول مرة .

3 ـ 3 بين أن المجموعة ممكن أن تذبذب بوسع z_i أكبر من z دون أن يغادر الجسم (S) الكفة (P) طالما أن قيمة z_i لم تتجاوز قيمة قصوية z_{max} . أحسب z_{max} . ما هو استنتاجك ؟

4 ـ تجريبيا عندما تمر المجموعة من النقطة O مباشرة ينفصل الجسم (S)عن الكفة .

نقبل أن $z<0$ الجسم (S) يبقى ملتصقا بالكفة و $z>0$ الجسم (S) ينفصل عن الكفة و $z=0$ الجسم (S) و الكفة (P) لهما نفس السرعة v .

نضع z_{max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم (S) و Z_{max} الارتفاع القصوي الذي يمكن أن تصل غليه الكفة والنابض . أوجد تعبيري z_{max} و Z_{max} .



<u>تمرين 5</u>

ننجز نواس لي بتعليق قرص عزم قصوره بالنسبة للمحور Δ $J_\Delta=5.10^{-5}kg.m^2$ بطرف سلك فلزي رأسي طوله $L=0,50m$. الطرف الآخر للسلك مثبت في النقطة O_1 بحيث يكون محوري دوران السلك والقرص منطبقين . يوجد القرص في مستوى أفقي .

1 ـ أوجد طبيعة حركة القرص وأعط تعبير دوره الخاص T_0 .

2 ـ احسب ثابتة لي السلك إذا كان $T_0=0,92s$.

3 ـ نثبت الآن طرفي السلك الذي يبقى رأسيا في النقطتين O_1 وO_2.
يوجد مركز قصور القرص على المسافة z من الطرف السفلي O_2 للسلك نهمل سمك القرص بالنسبة ل z .

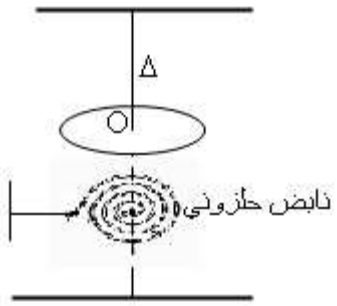
أ ـ أوجد طبيعة حركة النواس الجديد وأعط تعبير دوره T_0' بدلالة T_0 و L و z علما أن ثابتة لي السلك تتناسب عكسيا مع طوله .

ب ـ أحسب T_0' نعطي $\left(z=\frac{L}{3}\right)$

ج ـ بين أن الدور T_0' يبلغ قيمة قصوية T'_{max} عندما تأخذ z قيمة معينة z_m احسب z_m واستنتج T'_{max} .

تمرين 6

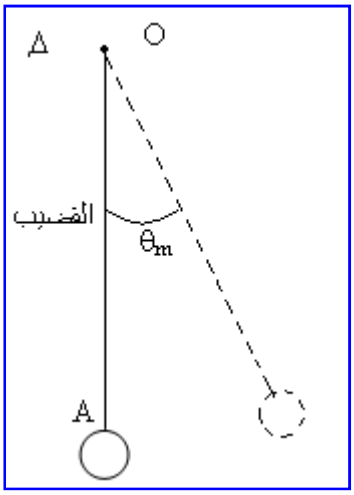
النابض الحلزوني لساعة مماثل لسلك ثابتة ليه $C=4.10^{-5}N.m.rad^{-1}$.
يدير هذا النابض رقاصا له شكل عجلة ، عزم قصورها بالنسبة لمحورها الثابت هو $J_\Delta =4.10^{-6}kg.m$
نبعد الرقاص عن موضع توازنه حيث يكون النابض مرتخيا بإدارته بزاوية $\alpha=30°$ ونطلقه بدون سرعة بدئية .



1 ــ عين السرعة الزاوية القصوية للرقاص .
2 ــ أحسب الطاقة الحركية وطاقة الوضع للنواس عندما تأخذ الاستطالة الزاوية θ القيمة $\frac{\theta_m}{2}$

تمرين 7

نثبت في أحد قضيب طوله l=40cm جسما صلبا (A) كتلته m=10g بحيث يمكن اعتباره نقطة مادية.
يمكن للقضيب أن يدور في مستوى رأسي بدون احتكاك، حول محور Δ أفقي وثابت يمر من النقطة O .
نهمل كتلة القضيب بالنسبة لكتلة الجسم (A) فنحصل على نواس عزم قصوره بالنسبة للمحور Δ هو $J_\Delta = m\ell^2$



1 ــ نزيح القضيب عن موضع توازنه الرأسي بزاوية θ_m ثم نطلقه بدون سرعة بدئية .
أ ـ بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك , برهن على أن حركة الجسم (A) دائرية جيبية في حالة التذبذبات ذات الوسع الضعيف .
ب ـ أعط تعبير الدور T لهذا النواس . واحسب قيمة T .
2 ــ نعتبر المجموعة {الجسم (A) ـ القضيب، الأرض}.
أ ـ برهن على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للجسم (A).
ب ـ أعط تعبير هذه الطاقة بدلالة m, l والسرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للقضيب .
ج ـ أوجد تعبر طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة m وا وθ وg .
θ : زاوية انحراف القضيب مع وضعه الرأسي.
نختار كمرجع لطاقة الوضع المستوى الأفقي المار من (A) في حالة توازن القضيب.
د ـ عين تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة m وا وg و θ_m .
3 ــ نعتبر من جديد القضيب في وضعه الرأسي (التوازن المستقر), نعطي للجسم (A) سرعة بدئية أفقية $\vec{V}_A$ منظمها 2m/s.
أ ـ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد الزاوية القصوية لانحراف القضيب بالنسبة لوضعه الرأسي.
ـ ما السرعة الدنوية التي يجب اعطاؤها للجسم (A) لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر .
ـ صف حركة المتذبذب إذا فاقت السرعة V_A قيمة هذه السرعة الدنوية . نعطي : $g=10m/s^2$

المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة
تصحيح التمارين

تمرين 1

1 ـ 1 تحديد $\Delta\ell$ عند التوازن $\vec{P}+\vec{F}=\vec{0}$ الإسقاط على Oz $mg-K\Delta\ell=0$

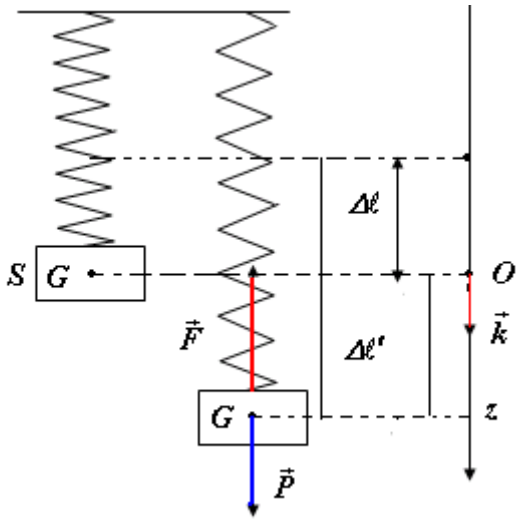
إذن $\Delta\ell=\frac{mg}{K}$ تطبيق عددي $\Delta\ell=2,5cm$

2 ـ1 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك $\vec{P}+\vec{F}'=m\vec{a}$ إسقاط العلاقة على Oz

$mg-K\Delta\ell'=m\ddot{z}$ بحيث أن $\Delta\ell'$ إطالة النابض عند اللحظة t $\Delta\ell'=\Delta\ell+z$

عند التوازن $mg-K\Delta\ell=0$ إذن $-Kz=m\ddot{z}$ أي



أن المعادلة التفاضلية للحركة هي $\ddot{z}+\frac{K}{m}z=0$

نضع $\omega_0^{\,2}=\frac{K}{m}$ وتصبح المعادلة $\ddot{z}+\omega_0^{\,2}z=0$

إذن فالحركة مستقيمية جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

2 ـ 2 المعادلة الزمنية للحركة

$z=Z_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$ بحيث أن

$Z_m=4.10^{-2}m$ و $\omega_0=20rad/s$ و عند اللحظة t=0 عندنا $z=Z_m$ أي أن $\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z=4.10^{-2}\cos(20t)$$

2 ـ 3 نبين أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t) $v=-Z_m\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوية $V_1=\pm Z_m\omega_0$ وبما أنه يمر

لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة $\vec{k}$ أي أن $\vec{V}_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}\vec{k}$ أي أن $V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$

تطبيق عددي $V_1=0,8m/s$

3

الهواء

تسارع الجسم هو a=g ونأخذ $z_0=0$ والسرعة البدئية $V_0=-V_1$

$$z=5t^2+0,8t$$

تمرين 2

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور Δ

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة (S) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة (S) :

$\vec{P}$ و $\vec{R}$ تأثير المحور على الجسم (S) .

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)+\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{R}\right)=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{R}\right)=0\Rightarrow\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-2mg.OH$$

$$OH=OG\sin\theta$$

لنحدد OG بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة (S) :

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{m\overrightarrow{OG_1}+m\overrightarrow{OG_2}}{2m}$ بحيث أن G_1 مركز قصور الساق و G_2 مركز قصور الكرة ز

ونختار O متطابقة مع المحور Δ . أي أن $\overrightarrow{OG_1}=5R\vec{i}$ و $\overrightarrow{OG_2}=11R\vec{i}$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{16R}{2}\vec{i}=8R\vec{i}$ وبالتالي فإن $OG=8R$

$$\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-2mg.OG\sin\theta\Rightarrow\mathcal{M}_{\Delta}\left(\vec{P}\right)=-16mgR\sin\theta$$

وبالتالي : $16mgR\sin\theta+J_{\Delta}\ddot{\theta}=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_{\Delta}}\sin\theta=0$

بما أن $\theta_m=10°$ فإن $\sin\theta\approx\theta$ أي أن $\ddot{\theta}+\dfrac{16mgR}{J_{\Delta}}\theta=0$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل التالي $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$.

دورها الخاص يكتب على الشكل التالي : $T_0=2\pi\sqrt{\dfrac{J_{\Delta}}{16mgR}}=1s$

2 ـ المعادلة الزمنية لحركة المجموعة (S) هي :

$\theta(t)=\theta_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ بحيث أن $\theta_m=10°=\dfrac{\pi}{18}rad$

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\theta(0)=\theta_m=\theta_m\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=1\Rightarrow\varphi=0$

$$\theta(t)=\frac{\pi}{18}\cos(2\pi t)$$

5 ـ الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t

$$E_C=\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2\Rightarrow E_C=\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_0{}^2\theta_m{}^2\sin^2(2\pi)$$

تكون الطاقة E_C قصوية

$$-1 \le \sin(2\pi t) \le 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \le 1$$

$$\frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \le \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \le \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوية للطاقة الحركية هي : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي : $E_{Cmax}=6.10^{-3}J$

6 ـ نستنتج تعبير طاقة الوضع التقالية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوية أي أن الطاقة الميكانيكية قصوية $E_{C\max} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$ ونعتبر أن طاقة الوضع منعدمة أي أن $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$. و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة الميكانيكية هي $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \left(1 - \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

$$E_p = E_{C\max} \cos^2(2\pi t)$$

تمرين 3

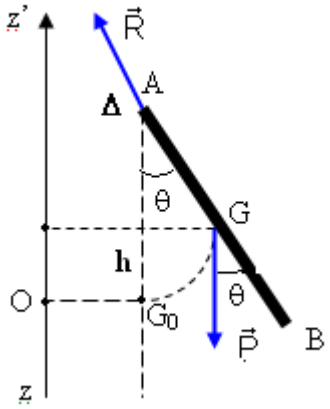
I ـ الدراسة التحريكية

1 ـ المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق $\vec{P}$ و $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$



$$-Mg\frac{L}{2}\sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\sin\theta = 0$$

حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 ـ المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التواقت (لا يتعلق دور حركة النواس بوسع الذبذبات في حالة الذبذبات ذات وسع صغير)

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير $\theta_m = \frac{\pi}{10} rad$ نعتبر أن $\sin\theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

بما أن $\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_\Delta}\theta = 0$ إذن فالمعادلة التفاضلية هي $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2$ $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$

3 ـ حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية دورها الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$ تطبيق عددي : $T_0 = 1,26s$

II ـ الدراسة الطاقية

1 ـ نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي : $E_p = Mgz + C$ حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية وحسب الشكل جانبه

$E_p = 0$ بالنسبة $z = 0$ إذن $C = 0$ وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي $E_p = Mgz$ بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

ومنه $E_p = \frac{MgL(1-\cos\theta)}{2}$

2 ـ أ

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل $\boldsymbol{\theta = 0}$ و $\boldsymbol{E_m = E_C = 0,5J}$ و $\boldsymbol{E_p = 0}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^{\,2} = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2\times 0,5}{J_\Delta}} = 5,77\,rad/s}$$

ب ـ موضع الساق عندما تكون $\boldsymbol{E_C = 0,25J}$ أي أن

$E_m = E_p + E_C \Rightarrow E_P = E_m - E_C = 0,5 - 0,25 = 0,25J$ فحسب الشكل $\boldsymbol{\theta = \pm\frac{\pi}{3}rad}$

الحالة الثانية :

عندما تكون $\boldsymbol{E_m > E_p \Rightarrow E_c \neq 0}$ مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور Δ .

- القيمة القصوية والقيمة الدنوية للسرعة الزاوية $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية E_C قصوية ونرمز لها ب $E_{C\max}$ حيث تكون طاقة الوضع ذنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون $\theta = 0$ أي $E_{p\min} = 0$ وفي هذه الحالة

$$E_m = E_{C\max} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}}$$

لدينا $J_\Delta = \frac{1}{3}ML^2 = 3.10^{-2}\,kg.m^2$ وأن E_m حسب الشكل هي : $E_m = 1,5J$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} = 10,8rad/s$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية $E_{C\min}$ وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه الحالة

$$E_m = E_{c\min} + E_{p\max} \Rightarrow E_{C\min} = E_m - E_{p\max}$$

أي أن $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2_{\min} = E_m - E_{p\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2\left(E_m - E_{p\max}\right)}{J_\Delta}}$

حسب المبيان لدينا :

$\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2\left(E_m - E_{p\max}\right)}{J_\Delta}} = 4,08 rad/s$: وبالتالي $E_{p\max} = 1,5J$ و $E_m = 1,75J$

تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة P أن طوله هو ℓ_0 عند وضع الجسم (S) فوق الكفة يصبح طول النابض ℓ_1 ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى .

1 ـ عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة

$\vec{F}$ و $\vec{P}$ نطبق شرط التوازن في المركز G

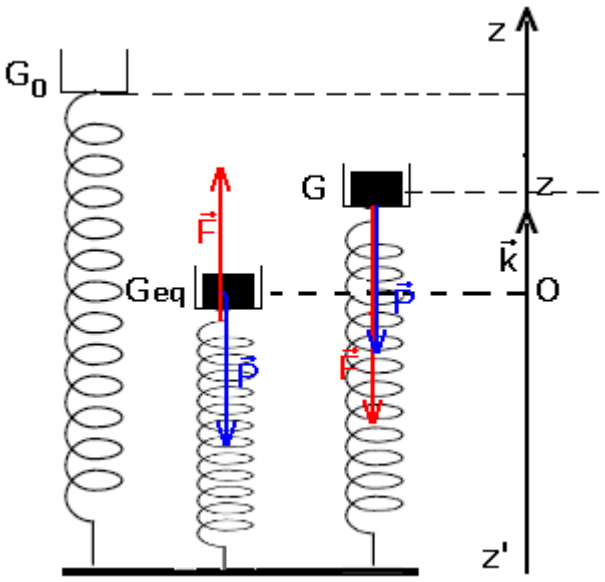
$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz

$\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$

$|\Delta\ell| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$

$|\Delta\ell| = 1cm$



2 ـ1 المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة

$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

$-k\overrightarrow{G_0G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow -k\left(\overrightarrow{G_0G_{eq}} + \overrightarrow{G_{eq}G}\right) + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

$-k\overrightarrow{G_0G_{eq}} - k\overrightarrow{G_{eq}G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

حسب السؤال السابق لدينا $\vec{P} - k\overrightarrow{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

أي أن $-k\overrightarrow{G_{eq}G} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz : $-kz = (m_1 + m_2)\ddot{z}$

إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي : $\ddot{z} + \frac{k}{m_1 + m_2} z = 0$

نستنتج الدور الخاص للحركة : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}}$

حساب T_0 :

$T_0 = 0,2s$

2 ـ 2 المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G حركة تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة t=0

$z(0) = Z_m \cos\varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos\varphi$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة t=0

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$$

وحسب المعطيات أن $\dot{z}(0) < 0$ إذن $\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\varphi$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos\varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,2}{Z_m} = \cos\varphi \\ \frac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin\varphi \end{cases}$$

$\cos\varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10° = \frac{\pi}{18} rad$ و بالنسبة ل $Z_m = 0,203m$

$$z(t) = 0,2\cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

3 **ـ نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية** :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$ بما أنه الحالة المرجعية تم اختيارها في المستوى حيث $z = 0$ فإن $C = 0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$ حيث a إطالة النابض

بحيث أن $a = |\Delta\ell| - z$ ونختار كحالة مرجعية z=0 إذن $0 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$

عند نشر هذه العلاقة نحصل على $E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ $E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

$E_p(t)$ طاقة الوضع الكلية للمجموعة و $E_c(t)$ الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

نعلم أنه عند التوازن $-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$

إذن $E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt}=0 \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{z}+kz=0$$

$$\ddot{z}=-\frac{k}{(m_1+m_2)}z$$

$$\ddot{z}+\frac{k}{(m_1+m_2)}z=0$$

3 ـ 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة O لأول مرة .

نطبق مبدا انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب z_m =z و z=0

$$\frac{1}{2}kZ_m^{\,2}+0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2+0$$

يعني أن $V=\sqrt{\frac{kZ_m^{\,2}}{m_1+m_2}}$ تطبيق عددي V=1,2m/s

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع z_i>z دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة $\vec{P}+\vec{R}=(m_1+m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz $-(m_1+m_2)g+R=(m_1+m_2)\ddot{z}$ حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z}=-\frac{k}{m_1+m_2}z$$

نعوض $\ddot{z}$ في العلاقة

$$-(m_1+m_2)g+R=-(m_1+m_2)\frac{k}{m_1+m_2}$$

$$R=(m_1+m_2)g-kz$$

لكي لايغادر الجسم الكفة يجب أن تكون $R>0$ هذا يعني أن $z_i<\frac{(m_1+m_2)g}{k}$

نضع $Z_m=\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول O يجب $z_i<Z_m \Rightarrow z_i<1cm$

مما يبين أن دراستنا النظرية لايمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني

4 ـ تعبيري Z_{max} و z_{max}

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

بالنسبة للجسم : قبل الانفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_1V^2+0$

بعد الانفصال : $E'_m=0+m_1gz_{max}$

$E_m=E'_m \Rightarrow z_{max}=\frac{V^2}{2g}$ تطبيق عددي z_{max}=7,2cm

بالنسبة للنابض والكفة

مباشرة قبل الإنفصال : $E_m=\frac{1}{2}m_2V^2+0+0$

بعد الانفصال $E'_m = \frac{1}{2}kZ_{max}^2 + m_2 g Z_{max}$

$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{max}^2 + 2m_2 g Z_{max} - m_2 V^2 = 0$

معادلة من الدرجة الثانية $Z_m^2 + 4Z_m - 0,29 = 0$

نحتفظ بالحل الموجب $Z_{max} = 0,07m$

<u>تمرين 5</u>

1 ـ طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك

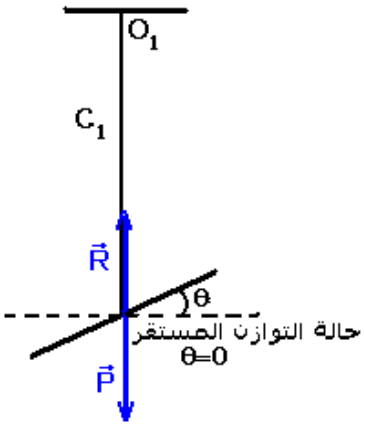
جرد القوى المطبقة على السلك :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta}$ لدينا $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ أي أن $\mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية : $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة حركة القرص حركة دورانية جيبية .

دورها هو : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$



2 ـ حساب ثابتة اللي بالنسبة ل $T_0 = 0,92s$:

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2} = 0,233.10^{-2}\, N.m.rad^{-1}$$

3 ـ طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جرد القوى المطبقة على النواس الجديد :

$\vec{P}$ وزن القرص ، $\vec{R}$ تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$ وبما أن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ و

$\mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$ فإن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

بحيث أن $\mathcal{M}_{C1} = -C_1\theta$ و $\mathcal{M}_{C2} = -C_2.\theta$.

حسب المعطيات لدينا أن C_1 تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن $C_1 = \frac{K}{L-z}$ و $C_2 = \frac{K}{z}$ أي أن ثابتة اللي للسلك الذي طوله L كذلك تتناسب عكسيا مع الطول : $C = \frac{K}{L}$

$-C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$ نعوض C_1 و C_2 في المعادلة $-K\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

لدينا كذلك : $K = C.L$ أي

$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)}C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_\Delta}\theta = 0$$

ب ـ تعبير الدور T'_0 :

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{z(L-z).J_\Delta}{L^2.C}} = \frac{T_0}{L}\sqrt{z(L-z)}$$

حساب T_0' في حالة $z = \frac{L}{3}$

$$T_0' = \frac{T_0}{L}\sqrt{\frac{L}{3}\left(\frac{2L}{3}\right)} = \frac{T_0}{3}\sqrt{2} = 0,43s$$

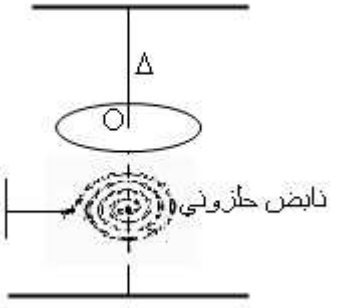
ج ـ لنبين أن T_0' تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = z_{\max}$

نحسب المشتقة الأولى ل T_0' :

$\frac{dT_0'}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$ وبالتالي فإن T_0' تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل $z = \frac{L}{2}$

في هذه الحالة تكون $T_{0\max}' = \frac{T_0}{2} = 0,46s$

تمرين6



1 ـ السرعة الزاوية القصوية للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنابض الحلزوني نختار $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$

كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه ، عند موضع التوازن $\theta = 0$ يكون النابض غير مشوه $E_p = 0$ أي أن $Cte = 0$ و

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي : $E_m(0) = E_m(equilibre)$ بحيث أن $E_m(0) = E_p(0) + E_C(0)$ الطاقة الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية $E_C(0) = 0$ و $E_p(0) = \frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}$ يعني أن

$$(1)\ E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}$$

عند مروره من موضع توازنه $E_p = 0$ و $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2{}_{max}$ يعني أن $(2)\ E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{max}^{\ 2}$

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج $\frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2{}_{max} \Rightarrow \dot{\theta}_{max} = \theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}_{max} = 1,66rad/s$

2 ـ حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_{max}^{\ 2}=\frac{1}{2}C\theta^2+E_C(t)\Rightarrow E_C(t)=\frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}-\frac{C\theta_m^{\ 2}}{8}$$

$$E_C(t)=\frac{3C\theta_m^{\ 2}}{8}$$

حساب طاقة الوضع : $E_p=\frac{1}{2}C\theta^2\Rightarrow E_p=\frac{C\theta_m^{\ 2}}{8}$

تطبيق عددي : $E_C=0{,}042.10^{-4}J$ و $E_p=0{,}014.10^{-4}J$

تمرين 7

1 ـ أ ـ نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A : $\sum\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i)=J_{\Delta}\ddot{\theta}$

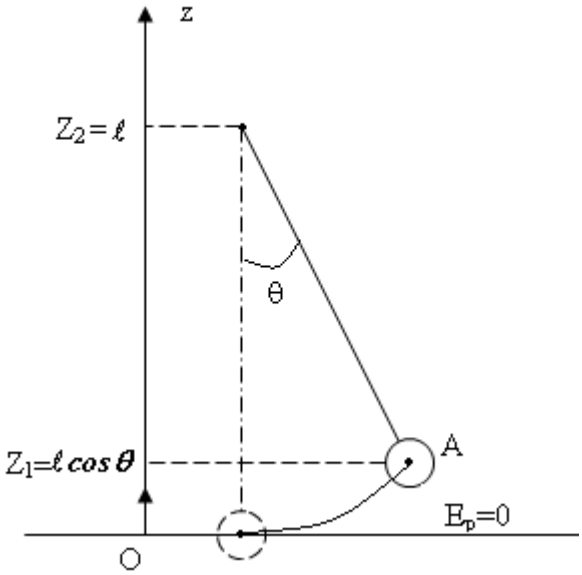
جرد القوى المطبقة على الجسم A :

$\vec{P}$ وزن الجسم A

$\vec{T}$ توتر القضيب

$\vec{R}$ تأثير المحور على القضيب .

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})+\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R})+\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T})=J_{\Delta}\ddot{\theta}$ وبما أن خط تأثير القوة $\vec{T}$ والقوة $\vec{R}$ يتقاطعا مع المحور Δ فإن عزمهما منعدم . أي أن $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})=J_{\Delta}\ddot{\theta}$



إذن $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P})=-mgd$ بحيث أن $d=l\sin\theta$

$$-mg\ell\sin\theta=J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{J_{\Delta}}\sin\theta=0$$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع الذبذبات : $\sin\theta\approx\theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{m\ell^2}\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية جيبية .

ب ـ تعبير الدور T_0 لهذا النواس : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ حساب الدور T : $T_0=0,4\pi s=1,26s$

2 ـ أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيب :

$$E_C=E_C(tige)+E_C(A)+E_C(terre)$$

$$E_C=\frac{1}{2}J'_{\Delta}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2+0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C=E_C(A)$

ب ـ تعبير الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}^2$

ج ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية : $E_p = mgz + cte$ نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$E_p = mg\ell(1 - \cos\theta)$ في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ وفي هذه الحالة تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell\frac{\theta^2}{2}$$

د ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m{}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2}mgl\theta_m{}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\frac{g}{l}\theta_m{}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2}mgl\theta_m{}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}ml\theta_m{}^2\left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}ml\theta_m{}^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن $E_m = Cte$

3 ـ 1 ـ نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوية α_m

$$-\frac{1}{2}mv_A^{\,2} = -mgl(1-\cos\alpha_m)$$

$$mv_A^{\,2} = 2mgl - 2mgl\cos\alpha_m$$

$$\cos\alpha_m = 1 - \frac{v_A^{\,2}}{2gl}$$

تطبيق عددي نجد $\alpha_m = \frac{\pi}{3}$

أ ـ السرعة الدنوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :

وضع التوازن غير المستقر : $\alpha_m = \pi$ أي أن $\cos\alpha_m = -1$ يعني أن $v'_A = 2\sqrt{gl}$

تطبيق عددي $v'_A = 4m/s$

ب ـ حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورا نية حول المحور Δ أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور Δ .

المظاهر الطاقية

I ـ شغل قوة

1 ـ شغل قوة ثابتة (تذكير)

نعبر عن شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها من A إلى نقطة B بالعلاقة التالية :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F.AB.\cos\alpha$$

بحيث أن α الزاوية بين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$

AB المسافة الفاصلة بين النقطة A و النقطة B تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)

F شدة القوة ب (N)

$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$ شغل القوة $\vec{F}$ ونعبر عنه بالجول (J)

* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير

2 ـ الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة $\vec{F}$ غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من A إلى B .

لحساب شغل غير ثابتة نجزء المسار إلى مسارات جزئية $\overrightarrow{\delta\ell}$ متناهية في الصغر تسمح باعتبار $\vec{F}$ ثابتة في كل منها .

تعبير الشغل الجزئي للقوة $\vec{F}$ خلال الانتقال الجزئي $\overrightarrow{\delta\ell}$ هو : $\delta W\left(\vec{F}\right)=\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية :

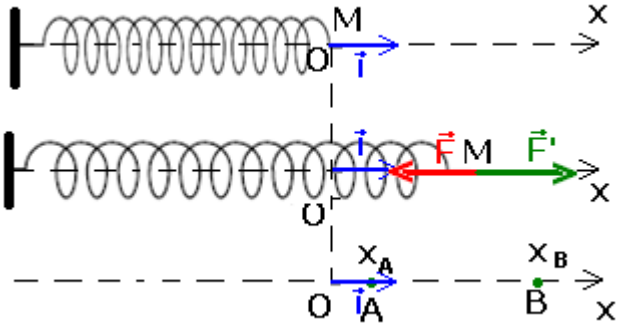
$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\sum_A^B\delta W\left(\vec{F}\right)=\sum_A^B\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$$

3 ـ شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض

نعتبر نابضا R ذا لفات غير متصلة صلابته k وكتلته مهملة ، في وضع أفقي على مستوى أفقي .

نثبت أحد طرفيه بحامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر M قوة $\vec{F}'$ ، فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة M بالمقدار $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}$.



تمثل النقطة O موضع M في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات المتبادلة ، فإن النابض يطبق قوة $\vec{F}$ على المجرب وهي قوة ارتداد $\vec{F}=-\vec{F}'$ بحيث أن $\vec{F}=-kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}'=kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}'$ تتعلق بالأفصول x إذن فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة $\vec{F}'$ عندما ينتقل طرف النابض من A إلى B

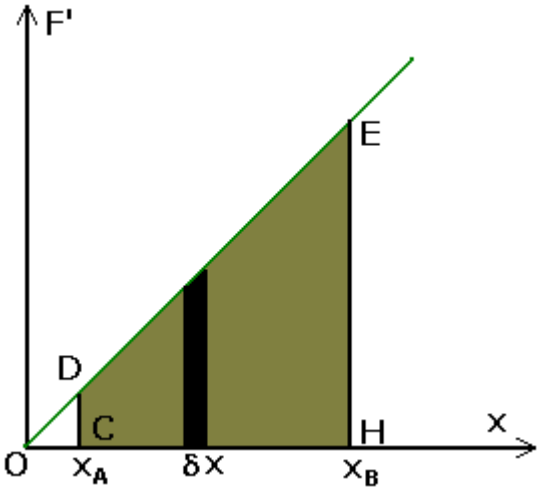
$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\sum_A^B\delta W\left(\vec{F}'\right)=\sum_A^B\vec{F}'.\overrightarrow{\delta\ell}=\sum_A^Bkx\vec{i}.\delta x.\vec{i}$$

يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

أ ـ الطريقة المبيانية :

في نظمة محورين نمثل تغيرات F بدلالة الأفصول x وهي إطالة النابض . $F=kx$ أي أنها دالة خطية تمر من أصل النظمة .

يوافق الشغل الجزئي $\delta W\left(\vec{F}'\right)=k.x.\delta x$ مساحة المستطيل الجزئي بالأسود المبين في الشكل جانبه .



عند انتقال النقطة M من A أفصولها x_A إلى B أفصولها x_B ،

فإن الشغل الكلي للقوة $\vec{F}'$ يوافقه مجموع مساحات المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف $CDEF$

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\mathcal{A}_{CDEF}=\mathcal{A}_{OEH}-\mathcal{A}_{OCD}$$

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$$

ب ـ الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$

ولانتقال الجزئي $\delta\ell$ ب المقدار التفاضلي dx فنحصل على العلاقة التالية :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\int_{x_A}^{x_B}kxdx=\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر لنابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع B أفصولهما على التوالي x_A و x_B هو : $W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$.

وبما أن $\vec{F}=-\vec{F}'$ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$

يتعلق شغل قوة الارتداد $\vec{F}$ بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

II ـ طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يختزن يختزن طاقة ترتبط بحالة تشوهه تسمى طاقة الوضع المرنة .

عندما يطبق المجرب قوة $\vec{F}'$ على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها x_A في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها x_B حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)+W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=0\Rightarrow W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=-W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)$$

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

نضع أن $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=E_{Pe}(A)-E_{Pe}(B)$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم ـ نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي تختزنه هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2+C$.

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعدمة في الموضع الموافق للأفصول $x=0$ حيث $(C=0)$

فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2$ وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الجول . و

x إطالة النابض و k صلابته .

ملحوظة : $\Delta E_{pe}=-W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$

III ـ الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته m وسرعته v في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على

طاقة حركية E_C بحيث $E_C=\frac{1}{2}mv^2$ وحدة E_C في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره

بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب

$x=x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ بحيث أن $E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

2 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة t هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .

طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة $E_P=E_{pp}+E_{Pe}$

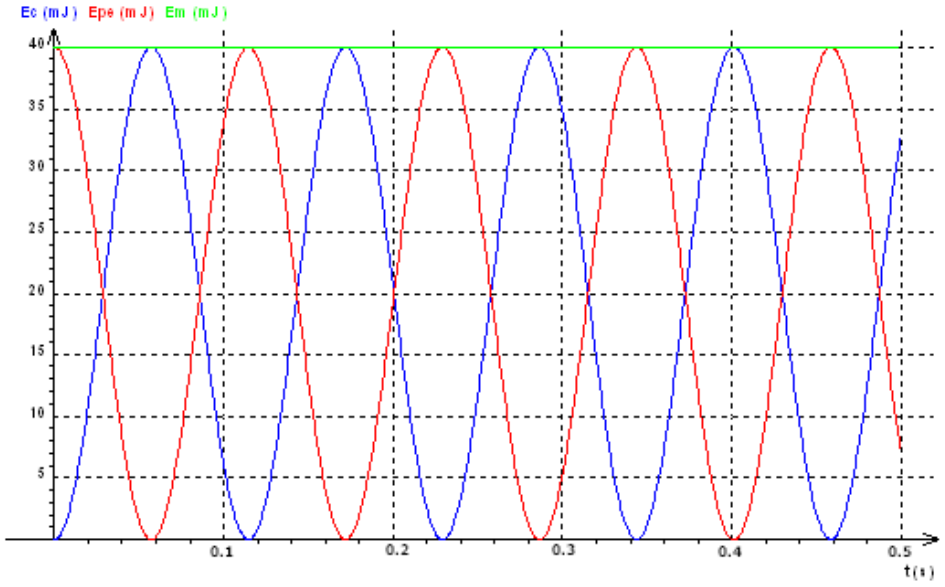
نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقة مع المستوى الأفقي المار من G مركز قصور

المتذبذب $\left(E_{PP}=0\right)$ نحصل على $E_P=E_{Pe}$ أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم

صلب ونابض أفقي هو : $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2+C$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي : $E_{pe}=0$ عند التوازن أي ان $x=0$ نحصل على التعبير

التالي : $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$



أ ـ حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص T_0 ، فيكون عندنا انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة . $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مهما كانت قيم x و v

ـ عندما تأخذ الاستطالة قيمتها القصوية x_m فإن الطاقة الميكانيكية $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

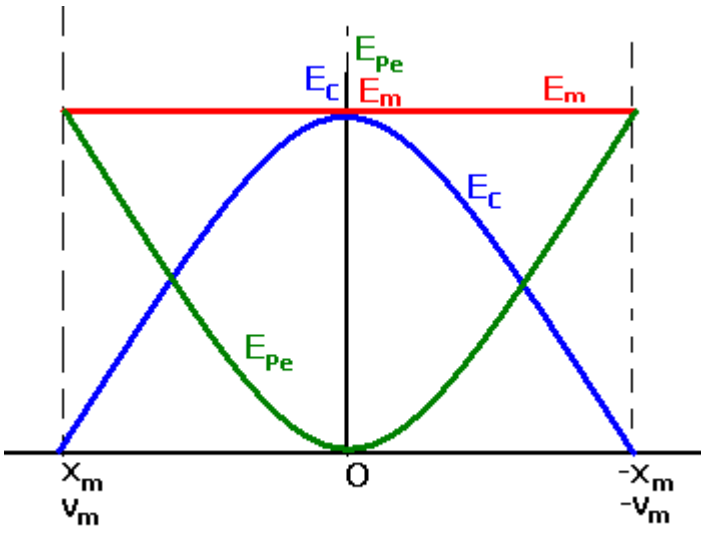
ـ عنما تكون الاستطالة منعدمة $x = 0$ فإن $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ وبالتالي فإن $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ ومنه نستنتج العلاقة : $v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظمة E_{Pe} و E_C و E_m



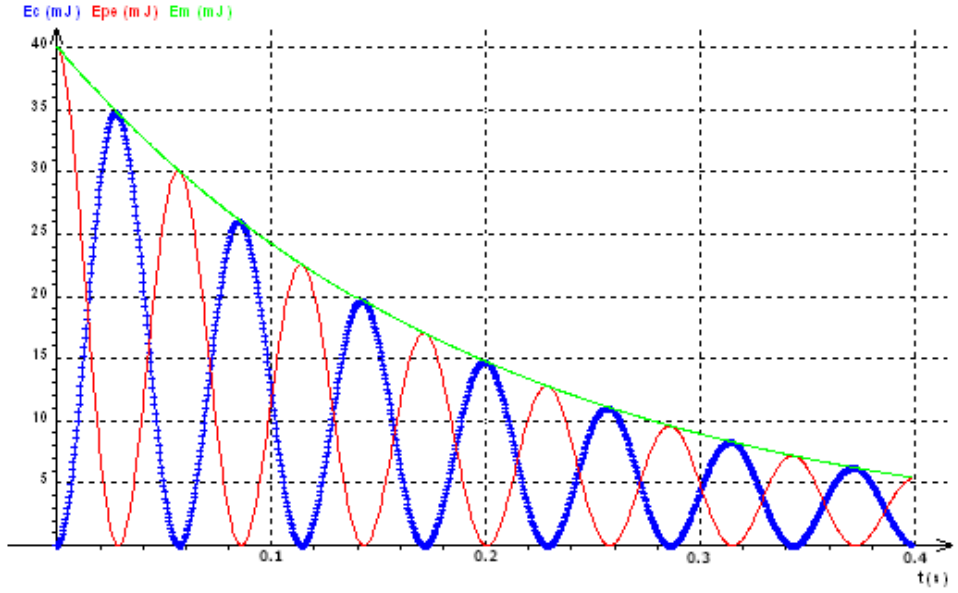
خلاصة : في غياب الاحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

ب ـ حالة احتكاكات غير مهملة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن t ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع الزمن t إلى الانتقال الحراري (وجود الاحتكاكات)

شكل منحنى تغيرات E_{pe} و E_C و E_m بدلالة الزمن :



IV ـ الدراسة الطاقية لنواس اللي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب ـ السلك }

بما أن السلك كتلته مهملة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي :

$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) المجسد من طرف السلك و $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية لدوران القضيب .

2 ـ طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه C في حركة تذبذبية حول محور (Δ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ . نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا : θ_1 و θ_2 .

جرد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته : $\vec{P}$ وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب $\vec{R}$ وإلى مزدوجة اللي عزمها $\mathcal{M}_C = -C.\theta$ ،

نطبق المبرهنة : $\frac{1}{2} J_\Delta \theta_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \theta_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_C$ بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) فإن شغلهما منعدم أي أن $\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_1^2 = W_C$

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي : $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

نأخذ $\varphi = 0$ لتبسيط العمليات الحسابية .

$\theta_1 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right)$ و $\theta_2 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right)$ أي أن $\dot{\theta}_1 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right)$ و

$\dot{\theta}_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right)$ وبتعويض هذه التعابير في العلاقة (1) $W_C = \frac{1}{2} C\theta_1^2 - \frac{1}{2} C\theta_2^2$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأفصول الزاوي من θ_1 إلى θ_2 . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب ـ السلك } وهي طاقة الوضع للي . $W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2)$ بحيث أن $E_{pt}(1) = \frac{1}{2}C\theta_1^2$ و $E_{pt}(2) = \frac{1}{2}C\theta_2^2$ وبالتالي نعرف طاقة الوضع للي بالمقدار التالي : $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ ، Cte ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية .

3 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$.

أ ـ في حالة احتكاكات مهملة .

نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية $J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$.

انطلاقا من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير E_m بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta\right) = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

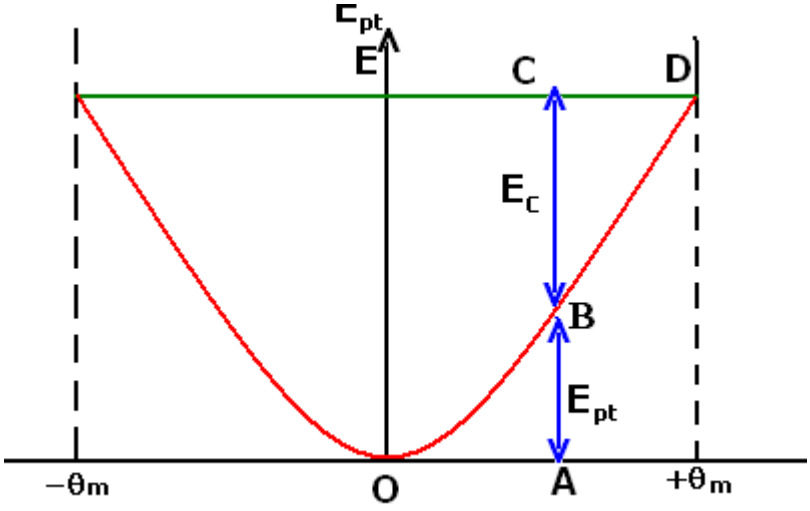
أي أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ .

ويمكن أن نبين كذلك انطلاقا من المعادلة الزمنية $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ أن هذه الثابتة هي :

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$$

خلاصة : تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنوس لي حر وغير مخمد : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :



من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال الذبذبات الحرة غي المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

ب ـ في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكة للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

V ـ الدراسة الطاقية للنواس الوازن

نعتبر المجموعة النواس الوازن {الحامل ـ الجسم S } بحيث أن J_Δ عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

ـ الطاقة الحركية للمجموعة : يتوفر النواس الوازن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض :

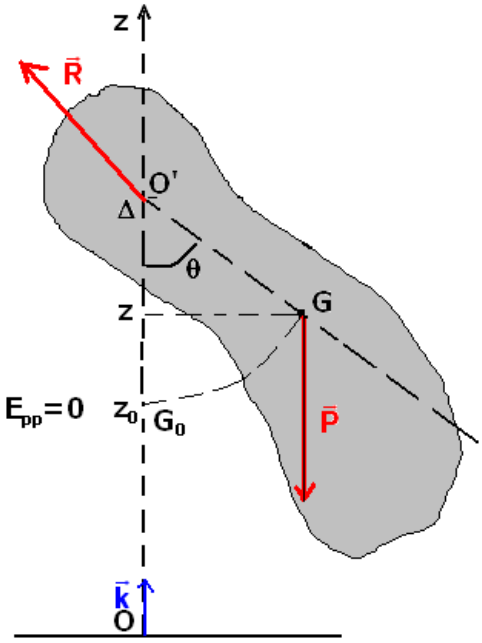
$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو :

$E_{pp} = mgz + cte$ حيث m كتلة الجسم S و z أنسوب مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .



ـ الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن.

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + cte$$

مثال :

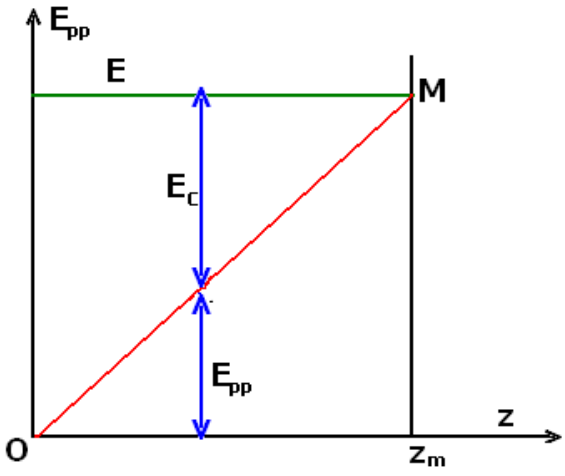
حسب الشكل : $z = z_0 + h$ بحيث أن

$h = O'G - O'G\cos\theta$ نضع $O'G = d$

$$z = z_0 + d\left(1 - \cos\theta\right)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$E_{pp} = 0$ عند $z = z_0$ أي أن $cte = -mgz_0$



$$E_m = mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \quad ..$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta}\sin\theta + J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta}\left(mgd\sin\theta + J_\Delta \ddot{\theta}\right) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن في مجال الثقالة ثابتة . **<u>إذن النواس الوازن</u>** **<u>مجموعة محافظة</u>**

ـ مخططات الطاقة

أ ـ الحالة العامة

* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$