◁ كيف نستعمل الأشكال المختلفة لعدد مركب ؟

الطريقة

	التحقق من الشكل	ما هو الشكل الذي نختاره ؟
الشكل الجبري	$a+ib$ تحقق أنّ a و b هما عددان حقيقيان	هذا الشكل يُسهل حساب المجموع و الفرق و يُمكّن من الربط بين الأعداد المركبة و الإحداثيات الديكارتية للصور
الشكل المثلثي	$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ تحقق أنّ r موجب	هذا الشكل يربط بين الأعداد المركبة و الهندسة و يُمكّن من حساب المسافات و الزوايا
الشكل الأسي	$re^{i\theta}$ تحقق أنّ r موجب	هذا الشكل يُسهل حساب الجداء، الكسر و القوى لأعداد مركبة

الانتقال من شكل إلى آخر

الشكل الأسي $z=re^{i\theta}$ ⟷ الشكل المثلثي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$

الشكل المثلثي → الشكل الجبري: $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$

الشكل الجبري $z=x+iy$ → الشكل المثلثي: $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\theta=\frac{x}{r}$ et $\sin\theta=\frac{y}{r}$

التطبيق الأول : أرفق الأعداد المركبة المقترحة بأشكالها المختلفة

الأعداد المركبة	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
① $(1+i)^3$	$-2-2i$ □	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ □
② $-2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$2+2i$ □	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
③ $\frac{8+4i}{3-i}$	$-2+2i$ □	$2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

◁ كيف نحدد الأعداد المركبة الخاصة ؟

الطريقة

للبرهنة على أنّ Z هو ...	حقيقي	تخيّلي صرف
يُمكن أن نبرهن أنّ ...	• إما $\mathrm{Im}(Z)=0$ • إما $\overline{Z}=Z$ • إما $\mathrm{Arg}(Z)=k\pi$ أو $Z=0$	• إما $\mathrm{Re}(Z)=0$ • إما $\overline{Z}=-Z$ • إما $\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $Z=0$

التطبيق الثاني : من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $1+i$، نعتبر العدد المركب $z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$

عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون:

(أ) z' عدد حقيقي غير معدوم

(ب) z' عدد تخيّلي صرف غير معدوم

◁ **كيف يتم تحديد الوضعية النسبية لثلاث نقط ؟**

الطريقة

في المستوي المركب، z_A، z_B و z_C هي أعداد مركبة متمايزة ذات الصور A، B و C على الترتيب.

نعتبر العدد المركب $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

الشرط:	يُكافئ:
$\|Z\| = 1$	$AB = AC$
Z حقيقي	A، B، C على استقامة واحدة
Z تخيّلي صرف	(AB) و (AC) متعامدان
$Z = \pm \mathrm{i}$	ABC مثلث قائم و متساوي الساقين
$Z = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	ABC مثلث متقايس الأضلاع

التطبيق الثالث: من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $1 + \mathrm{i}$، نعتبر العدد المركب $z' = \frac{z-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}$

عيّن هندسيا (باستعمال الطويلة و العمدة) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون:

(أ) z' عدد حقيقي غير معدوم

(ب) z' عدد تخيّلي صرف غير معدوم

(جـ) $|z'| = 1$

◁ **كيف نستعمل التحويلات النقطية ؟**

الطريقة

	الانسحاب	التحاكي	الدوران (في المستوي المُوجه)
العبارة المركبة	انسحاب شعاعه $\vec{u}(b)$ $\boldsymbol{z' = z + b}$	تحاك مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k $\boldsymbol{z' - \omega = k(z - \omega)}$	دوران مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ $\boldsymbol{z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)}$

و عكسيا كل تحويلا نقطيا عبارته المركبة هي $\boldsymbol{z' = az + b}$ مع $a \neq 0$ هو:

- إذا كان $\boxed{a = 1}$: **انسحاب** شعاعه $\vec{u}(b)$
- إذا كان $\boxed{a \in \mathbb{R}^* - \{1\}}$: **تحاك** نسبته a. مركز التحاكي هو النقطة Ω ذات اللاحقة $w = \frac{b}{1-a}$
- إذا كان $\boxed{|a| = 1}$: **دوران** زاويته $\arg a$. مركز الدوران هو النقطة Ω ذات اللاحقة $w = \frac{b}{1-a}$

التطبيق الرابع: نعتبر النقطتين A و B ذواتا اللاحقتين $z_A = 2 + \mathrm{i}$ و $z_B = 6 + 3\mathrm{i}$ على الترتيب.

لكل نقطة M ذات اللاحقة z نرفق النقطة z' ذات اللاحقة $z' = \mathrm{i}z + 2$ و نكتب $f(M) = M'$

1. عيّن طبيعة و العناصر المميّزة للتحويل النقطي f
2. عيّن اللاحقتين z_C و z_D للنقطتين C و D حيث $f(A) = C$ و $f(B) = D$
3. أثبت أنّ الدوران الذي مركزه النقطة J ذات اللاحقة $3 + 5\mathrm{i}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ يُحول A إلى D و يُحول B إلى C

التمرين الأول

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$
A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1-i$، $z_B=-1+i$ و $z_c=\sqrt{3}(1+i)$

1. أكتب على الشكل الأسيّ الأعداد المركبة z_A، z_B و z_c
2. (أ) أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}$، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها
   (ب) حدّد طبيعة المثلث ABC
3. عيّن لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACDB$ معينا
4. T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:
   $z'=(-1+i)z+1-3i$
   (أ) عيّن طبيعة التحويل T و عناصره المميزة
   (ب) عيّن العبارة المركبة للتحويل $T\circ T$ ثم استنتج طبيعته و عناصره المميزة

التمرين الثاني

◁ **الجزء الأول** نعتبر المعادلة (E) التالية:
$$z^3-(4+2i)z^2+(6+4i)z-4-4i=0$$
حيث z عدد مركب.

1. أثبت أنّ العدد المركب $2+2i$ حلاًّ للمعادلة (E).
2. عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c حيث يكون، من أجل كل عدد مركب z:
   $z^3-(4+2i)z^2+(6+4i)z-4-4i==(z-2-2i)(az^2+bz+c)$
3. استنتج حلول المعادلة (E).

◁ **الجزء الثاني**

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم 2cm).
نعتبر النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A=1+i$ $\qquad z_B=\overline{z_A}$ $\qquad z_C=2z_B$

1. عيّن الشكل الجبري لكل من z_B و z_C.
2. مثّل النقط A، B و C.
3. أثبت أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها النقطة I ذو اللاحقة 3 و نصف قطرها $\sqrt{5}$.
4. أحسب $\frac{z_C-3}{z_A-3}$، استنتج طبيعة المثلث IAC.
5. النقطة E هي صورة النقطة O بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{IC}$. عيّن لاحقة النقطة E.
6. النقطة D هي صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$. عيّن لاحقة النقطة D.

التمرين الثالث

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. L هو العدد المركب حيث: $L=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$
   (أ) احسب L^2 ثم عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب L^2
   (ب) استنتج الطويلة و عمدة للعدد L و اكتبه على الشكل المثلثي
   (ج) عيّن القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$
   (د) a هو العدد المركب حيث $a=\frac{L}{2+2i}$. بيّن أنّ $a=e^{\frac{i}{6}}$
2. T هو التحويل النقطي للمستوي في نفسه يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=-2az$
   (أ) حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميّزه
   (ب) A و B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ عيّن لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتحويل T
3. $(\mathcal{E})$ هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $|z-\sqrt{3}+i|=2$
   (أ) بيّن أنّ النقطة B نقطة من المجوعة $(\mathcal{E})$
   (ب) عيّن الطبيعة و العناصر المميّزة للمجموعة $(\mathcal{F})$ صورة المجموعة $(\mathcal{E})$ بالتحويل T

التمرين الرابع

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس و المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$، وحدة الرسم 1 cm.

و ليكن f التطبيق الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = \mathrm{i}z + 4 + 4\mathrm{i}$$

1. (أ) عيّن اللاحقة ω للنقطة Ω حيث $f(\Omega) = \Omega$

(ب) أثبت أنّه من أجل كل عدد مركب z، لدينا:
$$z' - 4\mathrm{i} = \mathrm{i}(z - 4\mathrm{i})$$

(جـ) استنتج طبيعة التطبيق f و عناصره المميزة

2. ليكن A و B النقطتين ذوات اللاحقتين
$$a = 4 - 2\mathrm{i}$$
و $b = -4 + 6\mathrm{i}$ على الترتيب

(أ) مثل النقط A، B و Ω على

(ب) عيّن لاحقتا النقطتين A' و B' صورتا النقطتين A و B، بهذا الترتيب، بالتطبيق f

3. نُسمّي m، n، p و q لواحق النقط M، N، P و Q المنتصفات بهذا الترتيب للقطع المستقيمة $[AA']$، $[A'B]$، $[BB']$ و $[B'A]$

(أ) عيّن العدد المركب m.

نقبل أنّ $n = 1 + 7\mathrm{i}$، $p = -3 + 3\mathrm{i}$ و $q = 1 - \mathrm{i}$

(ب) أثبت أنّ الرباعي $MNPQ$ هو متوازي أضلاع

(جـ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{q-m}{n-m}$ و استنتج طبيعة الرباعي $MNPQ$

4. أثبت أنّ المستقيمين $(B'A)$ و (ΩN) متعامدان

التمرين الخامس

في كل حالة من الحالات التالية، حدّد صحة أو خطأ التأكيد المقترح مع التبرير

1. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقطة A ذات اللاحقة 3، النقطة B ذات اللاحقة $-4\mathrm{i}$ و المجموعة $(\mathcal{E})$ للنقط M ذات اللاحقة z حيث $|z-3| = |z+4\mathrm{i}|$.

التأكيد 1: $(\mathcal{E})$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط الثلاثة A، B و C المتمايزة مثنى مثنى، ذات اللواحق a، b و c على الترتيب و حيث $\frac{c-a}{b-a} = 2\mathrm{i}$

التأكيد 2:

النقطة A تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[BC]$

3. نعتبر العدد المركب $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

التأكيد 3: العدد z^{2014} هو عدد حقيقي موجب

4. نعتبر، في الفضاء، ثلاثة نقط A، B و C ليست في استقامة واحدة. النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC. و لتكن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقط M التي تحقق
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$$

التأكيد 4:

$(\mathcal{F})$ هي سطح كرة مركزه G و نصف قطره 2

5. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

S هو سطح الكرة ذو المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 = 5$

و $\mathcal{P}$ هو المستوي ذو المعادلة $x + y - 5 = 0$

التأكيد 5:

المستوي $\mathcal{P}$ يقطع سطح الكرة S وفق دائرة