2014

الدرس الرابع

الدالة اللوغاريتمية

إعداد : الأستاذ ك. حامدي

4

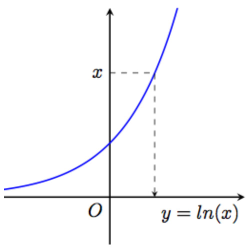
ثانوية العربي بن مهيدي _العلمة

4

في هذا المحور

الدالة اللوغاريتمية النيبرية

تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبرية



الدالة الأسية exp متزايدة تماما على المجال $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ أي صورة المجال $]-\infty;+\infty[$ هو المجال $]0;+\infty[$ حسب نظرية القيم المتوسطة فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، يوجد عدد حقيقي وحيد y حيث $e^y = x$. نرمز لـ y بالرمز $\ln x$ و عليه $e^{\ln x} = x$ بمعنى $\ln x$ هو العدد الحقيقي الوحيد الذي أسيته هي x

تعريف

الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي $x > 0$ العدد الحقيقي الذي يُرمز له بالرمز $\ln x$ حيث $e^{\ln x} = x$

نتائج

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ و من أجل كل عدد حقيقي y، لدينا التكافؤ التالي:

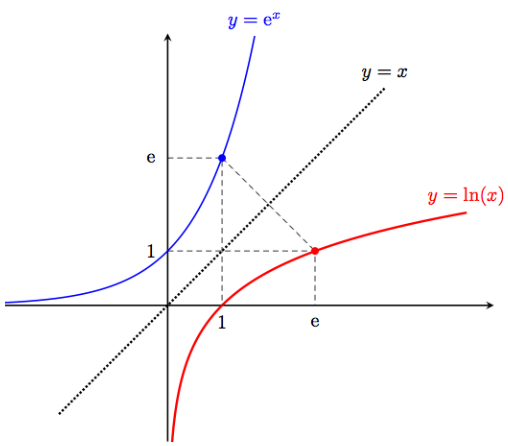
$$y = \ln x \quad \text{تكافئ} \quad x = e^y$$

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $e^{\ln x} = x$
- من أجل كل عدد حقيقي x، $\ln e^x = x$
- $\ln 1 = 0$ و $\ln e = 1$
- من أجل كل عدد حقيقي k، المعادلة $\ln x = k$ تقبل حلا وحيدا، هو $x = e^k$

خواص

الدالة ln هي الدالة العكسية للدالة exp و منه:

في معلم متعامد ، التمثيلان البيانيان للدالتين exp و ln متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$



اتّجاه تغيّر الدالة اللوغاريتمية النيبرية على المجال $]0;+\infty[$

مبرهنة

الدالة اللوغاريتمية النيبرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

البرهان

a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$ أي $0 < e^{\ln a} < e^{\ln b}$.

بما أنّ الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ $\ln a < \ln b$

نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

- $\ln a = \ln b$ تكافئ $a = b$
- $\ln a < \ln b$ تكافئ $a < b$
- $\ln x > 0$ تكافئ $x > 1$
- $\ln x < 0$ تكافئ $0 < x < 1$

طرائق

تمرين محلول 1 تعيين مجموعة تعريف و تبسيط عبارة

.1 في كل حالة، عيّن مجموعة تعريف العبارة المقترحة

- $\ln(x^2+4x)$
- $\ln|x^2+4x|$
- $\ln(x^2)$
- $\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$
- $\ln(x-3)+\ln(x-2)$
- $\ln(\ln x)$

.2 أكتب على أبسط شكل كل عدد من الأعداد التالية:

- $A = e^{\ln 3} + \ln e^2$
- $B = e^{2+\ln 8}$
- $C = e^{-\ln 3} + e^{\ln\frac{2}{3}}$

تمرين محلول 2 حل $\ln(u(x)) = m$ أو $\ln(u(x)) < m$

حل المعادلة و المتراجحة :

- $\ln x = -7$
- $\ln(2x-3) > -5$
- $\ln(1+x) \leq 31$

الطريقة: لحل المعادلة $\ln(u(x)) = m$ أو المتراجحة $\ln(u(x)) < m$

نُعيّن المجموعة D للأعداد الحقيقية x حيث $u(x) > 0$

نحُل في $\mathbb{R}$، المعادلة $\ln(u(x)) = m$ أو المتراجحة $\ln(u(x)) < m$ و نقبل إلّا الحلول التي تنتمي إلى D

تمرين محلول 3 حل $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ أو $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

حل المعادلة و المتراجحة :

- $\ln(x^2-1) = \ln 2x$
- $\ln(x^2-1) > \ln 2x$

الطريقة لحل المعادلة $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ أو المتراجحة $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

- نُعيّن المجموعة D للأعداد الحقيقية x حيث $u(x) > 0$ و $v(x) > 0$
- نحُل في $\mathbb{R}$، المعادلة $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ أو المتراجحة $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$ و نقبل إلّا الحلول التي تنتمي إلى D

الخواص الجبرية

الخاصية الأساسية

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $b > 0$، $\ln ab = \ln a + \ln b$

البرهان

للبرهنة أنّ عددين α و β متساويان يكفي أن نبرهن أنّ $e^{\alpha} = e^{\beta}$ لأنّ $[e^{\alpha} = e^{\beta} \quad \Leftrightarrow \alpha = \beta]$

بما أنّ $e^{\ln ab} = ab$ و $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$ فإنّ $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln ab}$ و نستنتج أنّ $\ln a + \ln b = \ln ab$

نتائج من الخاصية الأساسية

- **لوغاريتم كسر و مقلوب** : من أجل كل عددين $a > 0$ و $b > 0$، $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ و $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

البرهان

حسب الخاصية الأساسية، و بملاحظة أنّ $a = \frac{a}{b} \times b$ فإنّ $\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b$ و منه $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

و في الحالة الخاصة $a = 1$، $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = -\ln b$

- **لوغاريتم جداء لعدة أعداد** : من أجل كل الأعداد $a_1 > 0$، $a_2 > 0$، $\cdots$ ، $a_n > 0$،

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \square$$

ملاحظة هذه المساواة تُعمم الخاصية الأساسية

تنبيه

تُبرهن هذه المساواة بالتراجع (درس المتتاليات)

- **لوغاريتم قوى عدد** من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$، و من أجل كل عدد صحيح n، $\ln a^n = \ln a$

البرهان

- إذا كان $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ فإنّ من أجل $a > 0$ و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $\ln(a^n) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = n \ln a$
- و من أجل n عدد صحيح سالب تماما، $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n \ln a) = n \ln a$
- و من أجل $n = 0$، $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$

مثال : $\ln 4^{-3} + 5\ln 2 = -3\ln 2^2 + 5\ln 2 = -6\ln 2 + 5\ln 2 = -\ln 2$

- **لوغاريتم جذر تربيعي** من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$، $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

البرهان

بملاحظة $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$، فإنّ $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2\ln \sqrt{a}$ و منه $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

مثال : $\ln \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln \frac{5}{3} = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln 5$

طرائق

تمرين محلول 4 حل معدلات و متراجحات لوغاريتمية

حل المعادلة و المتراجحة :

- $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2}\ln x$
- $\ln(2x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)$

الطريقة : لحل معادلة أو متراجحة لوغاريتمية

- نُعيّن المجموعة D للأعداد الحقيقية x التي من أجلها كل لوغاريتم في المعادلة أو المتراجحة يكون معُرفا
- باستعمال الخواص الجبرية للدالة اللوغاريتمية ، نُحاول أن نُرجع حل هذه المعادلة إلى حل المعادلة $\ln(u(x)) = \ln v((x))$ (أو المتراجحة $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$)

تمرين محلول 5 حل $a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0$ أو $a(\ln x)^2 + b\ln x + c < 0$

حل المعادلة و المتراجحة :

- $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0$
- $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 > 0$

الطريقة : لحل المعادلة $a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0$ أو المتراجحة $a(\ln x)^2 + b\ln x + c < 0$ مع $a \neq 0$:

- نضع $X = \ln x$
- نحل عندئذ المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ أو المتراجحة $aX^2 + bX + c < 0$
- ثمّ نستنتج حلول المعادلة $a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0$ أو المتراجحة $a(\ln x)^2 + b\ln x + c < 0$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبرية

نهاية الدالة اللوغاريتمية النيبرية عند 0 و عند $+\infty$

مبرهنة

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

البرهان

- A عدد حقيقي. الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، إذا كان عددا حقيقيا يُحقق $x > e^A$، فإنّ $\ln x > A$ و منه فإنّ المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبيرا بالقدر الكافي و هذا يعني أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- من أجل $x > 0$، نضع $X = \frac{1}{x}$ ومنه $\ln x = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln X$، لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln X = +\infty$ حسب النتيجة الأولى و $\lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$ و نستنتج إذن أنّ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

الاستمرارية و قابلية الاشتقاق

خواص :

- نقبل أنّ الدالة $\ln$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$
- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

البرهان على الخاصية (2) :

نقبل أنّ الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = e^{\ln x}$.
حسب مبرهنة مشتق مركب دالتين فإنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$ و بما أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $f(x) = x$ فإنّ $f'(x) = 1$، إذن $\ln'(x) \times x = 1$ أي $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

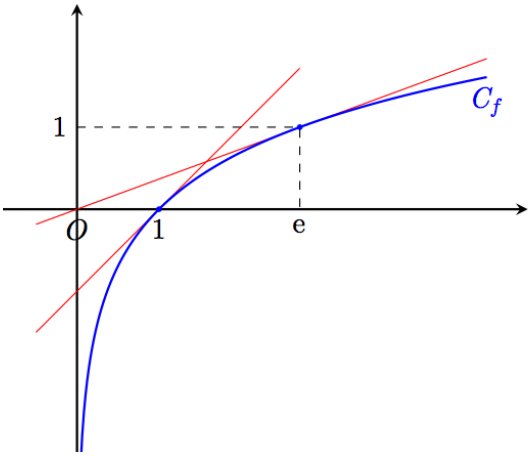
جدول التغيّرات و التمثيل البياني

الدالة $x \mapsto \ln x$ هي دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. متزايدة تماما على $]0;+\infty[$،

$\lim\limits_{x\to 0} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

و منه جدول التغيّرات و التمثيل البياني

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$		
$\ln$	$\|\|$ $-\infty$	0	1	$+\infty$



في معلم متعامد و متجانس، محور التراتيب هو مستقيم مقارب عمودي للمنحني $\mathcal{C}_f$ الممثل للدالة ln

طرائق

تمرين محلول 6 دراسة دالة

f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (\ln x)^2$

1. أدرس نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$
2. عيّن الدالة المشتقة للدالة f، أدرس إشارة $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغيّر الدالة f
3. شكل جدول تغيّرات الدالة
4. في معلم متعامد و متجانس أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f

تمرين محلول 7 دراسة دالة

f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

1. أحسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$
2. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و أنشئ تمثيلها البياني

دراسة الدوال اللوغاريتمية (تابع)

نهايات مهمة

مبرهنة

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

البرهان

- نضع $X = \ln x$، عندئذ $x = \mathrm{e}^X$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ و نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$ (لأنّ $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$)
- بوضع $X = \ln x$، عندئذ $x = \mathrm{e}^X$ و $\lim\limits_{x\to 0} X = -\infty$ و نستنتج $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$

مبرهنة

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \ln x = 0$

البرهان

- يكفي ملاحظة أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
- نضع $x = \frac{1}{X}$، عندئذ $X = \frac{1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{X}\right)^n \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X^n} = 0$

مبرهنة

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

البرهان

الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$، $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

إذن الدالة ln قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ و $\ln'(1) = 1$ و نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = 1$ بمعنى $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

بوضع $X = 1 + x$ يكون $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$

مشتقة الدالة $\ln \circ u$

مبرهنة

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال I، فإنّ الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي الدالة: $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

البرهان

حسب مبرهنة مشتق مركب دالتين، الدالة $f = \ln \circ u$ المعرفة على I بـ $f(x) = \ln[u(x)]$ هي قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي x من I،

$$f'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

طرائق

تمرين محلول 8 حساب نهايات: إزالة حالات عدم تعيين

1. أدرس النهاية عند 0 للدالة f، $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$
2. أدرس النهاية عند $+\infty$:
   (أ) للدالة f، $f(x) = x^2 - \ln x$
   (ب) للدالة g، $g(x) = \ln(2x-1) - \ln x$
   (ج) للدالة h، $h(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$
   (د) للدالة k، $k(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

تمرين محلول 9 دراسة دالة

f هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

1. أدرس نهايات f عند 0 و $+\infty$
2. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0; +\infty[$

أعمال موجّهة

اللوغاريتم العشري

تعريف

اللوغاريتم العُشري و الذي يُرمز إليه بالرمز log هو الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

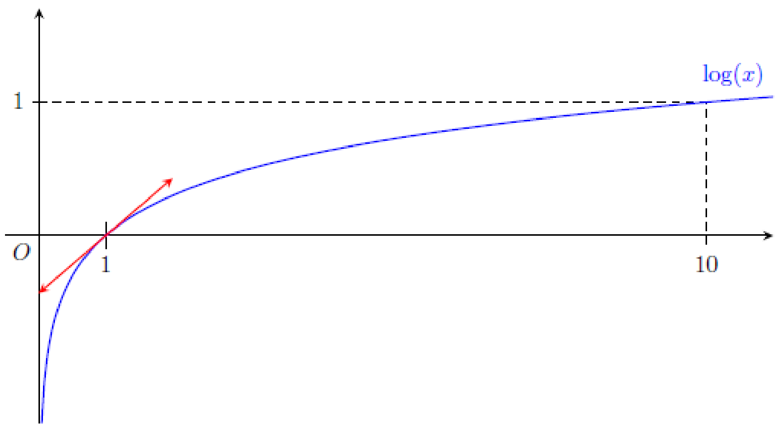
أمثلة أحسب log 1 و log 10، ثمّ log 100، log 1000 و log 10 000

ملاحظات

- لدينا $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$. بما أنّ $\frac{1}{\ln 10} > 0$ فإنّ الدالة log لها نفس اتجاه التغيّر و نفس نهايات الدالة ln
- من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $b > 0$، $\log ab = \log a + \log b$
- لدينا التكافؤ التالي : $x = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad y = \log x$

و عليه $\log 10^1 = 1$، $\log 10^2 = 2$، ...، $\log 10^n = n$

التمثيل البياني للدالة log



تطبيق عدد الأرقام في الكتابة العشرية

كل عدد حقيقي $N \geq 1$ هو محصور بين قوتين للعدد 10

في هذه الحالة N يشمل على $p+1$ رقما.

بما أنّ الدالة log متزايدة تماما، لدينا

$$\log 10^p \leq \log N \leq \log 10^{p+1}$$
$$p \leq \log N \leq p+1$$

لدينا إذن $E(\log N) = p$ حيث E هي الدالة الجزء الصحيح

النتيجة : عدد أرقام العدد N هو إذن : $E(\log N) + 1$

تطبيق : ما هو عدد أرقام العدد 2013^{2014} ؟

تمرين محلول 10 عدد أرقام عدد في الكتابة العشرية

بحلول جانفي 2013، اكتشف Curtis Cooper العدد الأولي الثامن و الأربعون لأعداد Mersenne (و هي الأعداد الأولية التي تُكتب على شكل $2^p - 1$ مع p عدد أولي). هذا العدد هو $M_{48} = 2^{57\,885\,161} - 1$

1. عيّن بالآلة الحاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log(M_{48})$
2. استنتج الحصر $10^{17425169} \leq M_{48} < 10^{17425170}$
3. ما هو عدد أرقام العدد M_{48} ؟

تمارين و مسائل للتعمق

تطبيقات

01 أكتب على أبسط شكل كل عدد من الأعداد التالية:

$A = \ln 9\sqrt{3}$ ، $B = 7\ln \mathrm{e}^3 + 5\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^3$ ،

$C = \ln\left(\sqrt{10}+3\right)^4 + \ln\left(\sqrt{10}-3\right)^4$

02 في كل حالة، حل المعادلة أو المتراجحة المقترحة

1. $\ln x + \ln(x-3) = 2\ln 2$
2. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$
3. $\ln(x+3)(x+2) = \ln(x+11)$
4. $\ln\sqrt{3x-1} + \ln\sqrt{x-1} = \ln(x-2)$
5. $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$
6. $(\ln x)^2 - 4\ln x \leq 0$

03 أحسب، في كل حالة، النهاية المقترحة

1. $f(x) = x\ln 3x$ عند 0
2. $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{3x^2+x-2}$ عند $+\infty$
3. $f(x) = (x^2-1)\ln(x-1)$ عند 0
4. $f(x) = x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$ عند $+\infty$
5. $f(x) = x - (\ln x)^2$ عند $+\infty$

04 f هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right), & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. برّر لماذا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0

دراسة دوال

05 f هي الدالة المعرفة على المجال $I =]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على I
2. أثبت أنّ المستقيم d ذو المعادلة $y = x - 4$ هو مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f عند $+\infty$.
   (ب) حدّد وضعية $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى d.
   (جـ) أنشئ d، ثمّ $\mathcal{C}$.

06 f هي الدالة المعرفة بما يلي:

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2)\square$$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f
2. عيّن نهايات الدالة f عند حدود مجوعة تعريفها
3. أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها
4. حل المعادلة $f(x) = 0$
5. أنشئ المنحني $\mathcal{C}$

07 f هي الدالة المعرفة على المجال $I =]1;3[$ بما يلي:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)\square$$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $(4-x)$ ينتمي إلى المجال I.
   (ب) أحسب من أجل كل x من I، $\frac{1}{2}[(4-x)+f(x)]$
   (جـ) استنتج أنّ النقطة A ذات الإحداثيات $(2;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}$.
2. أدرس تغيّرات الدالة f و أنشئ $\mathcal{C}$.

08 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني

1. (أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،
   $f(x) = -x + \ln(1+\mathrm{e}^x)$
   (ب) استنتج أنّ المنحنى $\mathcal{C}$ يقبل مستقيم مقارب عند $-\infty$
2. أحسب نهاية f عند $+\infty$، أدرس تغيّراتها ثمّ أنشئ $\mathcal{C}$.
3. لتكن النقط A، B، C من المنحنى $\mathcal{C}$ ذات الفواصل 0، 1، -1 على الترتيب. أثبت أنّ المماس للمنحنى $\mathcal{C}$ عند A يوازي المستقيم (BC)

من الباكالوريا ...

09 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

نعتبر الدالة g ذات المتغيّر الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x\square$$

(أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g

(ب) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;\infty[$. تحقق أنّ $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$

(جـ) استنتج إشارة $g(x)$.

1. لتكن الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}\square$$

و ليكن $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني

(أ) عيّن نهايتي f عند 0 و عند $+\infty$. فسر بيانيا هذه النتائج

(ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)\square$$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f.

(ج) بيّن أنّ

$$f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}\square$$

(د) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}$. (الوحدة 2cm على محور الفواصل و 4cm على محور التراتيب)

10 نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x\square$$

و ليكن $\mathcal{C}$ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$

(ب) أثبت أنّ المستقيم ذو العادلة $y=\frac{1}{3}x$ هو مُقارب للمنحنى $\mathcal{C}$ عند $+\infty$

2. بمُلاحظة صحة المتباينة $1+e^{-x}>e^{-x}$، أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)>-\frac{2}{3}x$

استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$

3. أثبت أنّ المستقيم ′ ذو المعادلة $y=-\frac{2}{3}x$ هو مُقارب للمنحنى $\mathcal{C}$ عند $-\infty$

4. (أ) f' هي الدالة المشتقة للدالة f. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x،

$$f'(x)=\frac{e^x-2}{3(e^x+1)}$$

(ب)استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها على $\mathbb{R}$

5. ليكن (T) المماس للمنحنى $\mathcal{C}$ في النقطة ذات الفاصلة 0

(أ) عيّن معامل توجيه المماس (T)

(ب) a عدد حقيقي غير معدوم، M و N نقطتان من المنحنى ذوات الفاصلتين a و $(-a)$ على الترتيب،

أثبت أنّ المستقيم (MN) يُوازي المستقيم (T)

6. أنشئ المستقيمين $\mathcal{D}$، $\mathcal{D}'$ و المنحنى $\mathcal{C}$

11 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\square \quad \text{و} \quad g(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\square$$

1. (أ) أحسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$

(ب) أثبت أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارة f'

(ج) استنتج تغيّرات الدالة f

(د) استنتج إشارة $f(x)$ من أجل $x\in]0;+\infty[$

2. تحقق أنّ الدالة g هي مُركب الدالتين $x\mapsto\frac{1}{x}$ و $X\mapsto\frac{\ln(1+X)}{X}$ بهذا الترتيب.

استنتج نهاية الدالة g عند $+\infty$

(ب) أثبت أنّ الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

و تحقق أنّه من أجل كل $x>0$، $g'(\ )=f(x)$

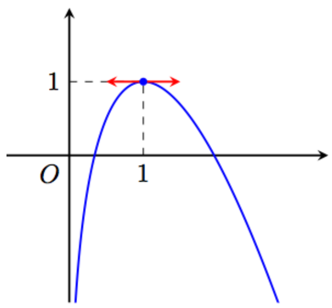
(ج) شكل جدول تغيّرات الدالة g

12 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=ax+(bx+c)\ln x\square$$

حيث a، b و c أعداد حقيقية

و $(\mathcal{C})$ هو منحنى الدالة f



1. باستعمال المنحنى $(\mathcal{C})$ و علما أنّ $(2)=2-3\ln 2$ بيّن أنّ $a=c=1$ و $b=-2$

2. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=x(1-2x)\ln x$$

عين نهاية g عند 0 و عند $+\infty$

3. عين الدالة المشتقة للدالة g

(ب) أدرس على المجال $]0;+\infty[$ إشارة $-2\ln x$ و إشارة $\frac{1-x}{x}$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ و تغيّرات الدالة g

(ج) شكل جدول تغيّرات الدالة g

4. ليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$

(أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(1-2)\ln x=0$ و أعط تفسيرا بيانيا لهذه الحلول

(ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ

13 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln(x+e^{-x})$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $x+e^{-x}\geq 1$

(إعانة: أدرس اتجاه تغيّر الدالة $x\mapsto x+e^{-x}$)

(ب) برّر أنّ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

2. تحقق من التأكيدين التاليين:

(أ) من أجل كل $x>0$، $f(x)=-x+\ln(1+e^x)$

(ب) من أجل كل $x>0$، $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

(ج) استعمل هذه النتائج لحساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

3. استنتج من السؤال 2 أنّ المستقيم Δ ذو المعادلة $y=-x$ هو مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

(ب) ما هي نهاية $[(x)-\ln x]$ عند $+\infty$ ؟

ما ذا يُمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى $\mathcal{C}$ و المنحنى Γ المُمثل للدالة $\ln$ ؟

4. في هذا السؤال نُريد دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}$ و Δ، لذلك نعتبر الدالة d المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ :

$$d(x)=1+xe^x$$

(أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة d و استنتج أنّه من أجل كل $x<0$، $d(x)$ تنتمي إلى المجال $]0;1[$

(ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين $\mathcal{C}$ و Δ من أجل $x<0$

5. أنشئ في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$، Δ، Γ ثمّ المنحنى $\mathcal{C}$

14 **الجزء الأول**: دراسة دالة مساعدة

g هي الدالة المعرفة على المجال$[0;+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(1+x^2)\square$$

1. أثبت أنّه على المجال $]1;+\infty[$، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1}
2. حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

الجزء الثاني: دراسة دالة

g هي الدالة المعرفة على المجال$[0;+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x>0\square \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. ما هي نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{}$ عند 0 ؟

إعانة: ضع $x^2=X$

(ب) استنتج أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ثمّ أوجد معادلة للمماس T عند النقطة ذات الفاصلة 0 من المنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f

2. تحقق أنّه من أجل كل $x>0$،

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

(ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. (أ) أثبت أنّه من أجل كل $x>0$،

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\square$$

(ب) استنتج تغيّرات الدالة f.

(ج) أنشئ T، ثمّ $\mathcal{C}$.

15 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)\square$$

و $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1. (أ) أدرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(ب) عيّن الدالة المشتقة للدالة f.

(ج) أدرس إشارة $f'(x)$. استنتج تغيّرات f و شكل جدول تغيّراتها

2. أثبت أنّ المستقيم d ذو المعادلة $y=2x$ هو مقارب لتمنحنى $\mathcal{C}$ عند $+\infty$.

(ب) أنشئ المستقيم d و المنحنى $\mathcal{C}$.

3. k عدد حقيقي موجب تماما.

ناقش حسب قيم k، عدد حلول المعادلة
$e^{2x}-e^x+1-k=0$

(أ) باستعمال تغيّرات الدالة f

(ب) بالحساب

16 **الجزء الأول**

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$

$$f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$$

1. (أ) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

(ب) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها

2. (أ) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]0;+\infty[$ حلا وحيدا ℓ ينتمي إلى المجال $]1{,}7;1{,}8[$

(ب) استنتج إشارة $f(x)$ من أجل $x>0$

الجزء الثاني

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=-\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x, & x>0 \end{cases}$$

1. (أ) أدرس استمرارية الدالة g و قابليتها للاشتقاق عند الصفر

ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$

2. لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g

أحسب $g'(x)$ من أجل $x>0$ ثمّ تحقق أنّ $g'(x)=x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$

3. استنتج إشارة $g'(x)$ من أجل $x>0$ ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة g
4. عيّن معادلة لمماس المنحنى $\mathcal{C}_g$ في النقطة ذات الفاصلة 0 و معادلة للمماس في النقطة ذات الفاصلة 1
5. أنشئ هذين المماسين ثمّ المنحنى $\mathcal{C}_g$

تمارين للتعمق

17 علما أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $\ln x\le x-1$ أثبت أنّ،

$$1+2\ln x\le x^2\square$$

18 a و b هما عددان حقيقيان موجبين تماما.

1. قارن بين العددين $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$ و $\frac{\ln a+\ln b}{2}$
2. في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مثل Γ منحنى الدالة ln و النقطتين M و N من Γ ذات الفصلتين a و b على الترتيب ثمّ استنتج المقارنة السابقة بيانيا

19 a و b هما عددان حقيقيان

أثبت أنّ (1) و (2) متكافئتان

$$e^a-e^{-a}=2b \qquad (1)$$

$$a=\ln\left(b+\sqrt{1+b^2}\right) \qquad (2)$$

20 أثبت أنّ

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$$

حل تمارين و إرشادات

...