I- الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية:

- **تعريف:**

كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على شكل $n=2k$ حيث $k\in\mathbb{N}$ يسمى عددا زوجيا .

و كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على شكل $n=2k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$ يسمى عددا فرديا .

- **ملحوظة:**

الأعداد الصحيحة الطبيعية الزوجية تكون مجموعة يرمز لها ب P ، و مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية تكون مجموعة يرمز لها ب I و لدينا :

$\mathrm{P}=\{2k\ /\ k\in\mathbb{N}\}$ أي أن : $\mathrm{P}=\{0,2,4,6,8,...\rightarrow\}$

و $I=\{2k+1/k\in\mathbb{N}\}$ أي أن : $I=\{1,3,5,7,9,...\rightarrow\}$.

إذن ، كل عدد صحيح طبيعي هو إما عدد زوجي أو عدد فردي .

II- قواسم و مضاعفات عدد صحيح طبيعي:

- **تعريف01:**

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين ، نقول إن b قاسم ل a و نكتب $b\mid a$

إذا وجد q من $\mathbb{N}$ بحيث : $a=bq$.

- **مثال:**

مجموعة قواسم العدد 36 هي : $D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

هذا يعني أن للعدد 36 تسعة قواسم .

- **ملحوظة:**

لكل عدد صحيح طبيعي a قاسمين على الأقل هما : 1 و a .

إذن : $\{1,a\}\subseteq D_a$ لكل a من $\mathbb{N}$.

- **تمرين01:**

أ- حدد D_{125} مجموعة قواسم العدد 125 ، و D_{150} مجموعة قواسم العدد 150 .

ب- حدد مجموعة قواسم كل عدد من الأعداد التالية : $a=78$ و $b=5\times78$ و $c=7\times78$.

- **تعريف02:**

ليكن a و m عددين صحيحين طبيعيين .

نقول إن m مضاعف ل a إذا وجد k من $\mathbb{N}$ بحيث : $m=ka$.

يرمز لمجموعة مضاعفات العدد a بالرمز M_a ، ولدينا : $M_a=\{0,a,2a,3a,4a,....\rightarrow\}$

إذن M_a مجموعة لا منتهية ، بمعنى أن كل عدد صحيح طبيعي a يقبل ما لا نهاية من المضاعفات .

- **تمرين02:**

حدد مضاعفات العدد 21 المحصورة بين العددين 100 و 250 .

- **تمرين03:**

نعتبر العدد الصحيح الطبيعي : $n=2^4\times5^2$.

أ- تحقق من أن n مربع لعدد يتم تحديده ، وأن $20n$ مكعب لعدد يتم تحديده أيضا .

ب- بين أن العدد $2^3\times5$ قاسم ل n و أن العدد $2^6\times5^2\times7$ مضاعف له .

- **تمرين04:**

اعط عددا صحيحا طبيعيا مكون من ثلاثة أرقام ثم ضع جانبه نفس العدد ، نحصل إذن على عدد a مكون من ستة أرقام .

حدد العدد b خارج قسمة a على 7 ، ثم حدد العدد c خارج قسمة b على 11 و أخيرا حدد العدد d خارج قسمة c على 13 . ماذا تلاحظ ؟

- **تمرين05:**

أ- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ لكي يكون العدد $n+8$ مضاعفا للعدد n .

ب- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ لكي يقبل العدد $n+11$ القسمة على العدد $n-1$.

ج- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ لكي يقبل العدد $3n+24$ القسمة على العدد $n-4$.

د- حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$(1):x^2-y^2=16$ و $(2):x^2-4y^2=36$ و $(3):25x^2-4y^2=36$

و $(4):9x^2-4y^2=44$.

III- مصاديق قابلية القسمة على 2 و3 و4 و5 و9 و10 و11 و25 :

- **مبرهنة:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و $n=\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1a_0}$ كتابته في نظمة العد العشري .

. يكون العدد n قابلا للقسمة على **2** (أي زوجيا) إذا و فقط إذا كان رقم و حدانه a_0 ينتمي إلى المجموعة $\{0,2,4,6,8\}$.

. يكون العدد n قابلا للقسمة على **5** إذا وفقط إذا كان رقم وحدانه a_0 ينتمي إلى الثنائية $\{0,5\}$.

. يكون العدد n قابلا للقسمة على **3** (على التوالي على **9**) إذا وفقط إذا كان مجموع أرقامه $a_n+a_{n-1}+....+a_1+a_0$ يقبل القسمة على **3** (على التوالي على **9**) .

. يكون العدد n قابلا للقسمة على **4** (على التوالي على **25**) إذا وفقط إذا كان العدد $\overline{a_1a_0}$ يقبل القسمة على **4** (على التوالي على **25**) .

. يكون العدد n قابلا للقسمة على**11** إذا وفقط إذا كان $d=a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n$ يقبل القسمة على **11** .

- **تمرين06:**

أ- من بين الأعداد التالية حدد مضاعفات العدد **3** و مضاعفات العدد **4** :

436 و 452 123 و 453 123 و 544 67 .

ب- اعط عددا صحيحا طبيعيا مكون من خمسة أرقام يقبل القسمة على العددين **2** و **3** و لا يقبل القسمة على **9** .

- **تمرين07:**

حدد الرقمين x و y لكي يكون العدد $n=\overline{28x\,75y}$ قابلا للقسمة على **3** و **11** .

IV- المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر:

1)- المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

- **تعريف:**

المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين و غير منعدمين a و b هو أصغر مضاعف غير منعدم مشترك بينهما ، و يرمز له بالرمز $a\vee b$.

- **مثال:**

لنحدد $25\vee 15$ ، لدينا :

$M_{15}=\{0,15,30,45,60,75,90,.....\rightarrow\}$ و $M_{25}=\{0,25,50,75,100,125,....\rightarrow\}$

إذن : $25\vee 15=75$.

- **ملحوظة:**

إذا كان العدد a مضاعفا للعدد b فإن : $a\vee b=a$.

2)- القاسم المشترك الأكبر لعددين:

- **تعريف:**

القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين و غير منعدمين a و b هو أكبر قاسم مشترك بينهما ، و يرمز له بالرمز $a\wedge b$.

- **مثال:**

لنحدد $25\wedge 15$ ، لدينا :

$D_{15}=\{1,3,5,15\}$ و $D_{25}=\{1,5,25\}$ إذن : $25\wedge 15=5$.

- **ملحوظة:**

إذا كان العدد a مضاعفا للعدد b ، فإن : $a\vee b=b$.

- **خوارزمية أقليدس أو طريقة القسمات المتتالية:**

تمكن هذه الخوارزمية من تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين a و b بحيث $a>b$ بالكيفية التالية :

ننجز قسمة a على b و ليكن r_1 باقي هذه القسمة ، ثم ننجز قسمة b على r_1 و ليكن r_2 باقي هذه القسمة ، نعيد هذه العملية إلى أن يكون الباقي منعدما ، و $a\vee b$ هو آخر باقي غير منعدم .

- **مثال:**

لنحدد $120\vee 45$ ، نلخص القسمات المتتالية في الجدول التالي :

الخارج	$q_1=2$	$q_2=1$	$q_3=2$
$a=120$	$b=45$	$r_1=30$	$r_2=15$
الباقي	$r_1=30$	$r_2=15$	$r_3=0$

و بالتالي فإن : $120\vee 45=15$.

V- الأعداد الأولية ، التفكيك إلى جداء من عوامل أولية:

1)- الأعداد الأولية:

- **تعريف:**

ليكن p عددا أوليا ، نقول إن p عدد أولي إذا كان له قاسمان بالضبط هما : 1 و p بمعنى أن : $D_p=\{1,p\}$.

- **مثال:**

العدد 47 له قاسمان بالضبط هما 1 و 47 ، إذن فهو عدد أولي .

2)- غربال إراطوستين و الأعداد الأولية:

- **خاصية:**

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا .

إذا كان كل عدد أولي p بحيث $p^2\leq a$ لا يقسم العدد a ، فإن a عدد أولي .

- **أمثلة:**

نعتبر العددين : $a=487$ و $b=511$.

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من العدد $a=487$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 و 19 .

باستعمال مصاديق قابلية القسمة على 2 ، 3 ، 5 و 11 ، يتضح أن العدد $a=487$ لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد .

و إذا إنجزنا قسمة العدد $a=487$ على 7 ، 13 ، 17 و 19 على التوالي فالباقي في جميع الحالات غير منعدم ، إذن فالعدد $a=487$ لا يقبل أيضا القسمة على هذه الأعداد .

و التالي فهو عدد أولي .

بالنسبة للعدد $b=511$ ، لدينا : $511=7\times 73$ إذن فهو غير أولي .

- **غربال إراطوستين:** (Crible d'ératosthène)

غربال إراطوستين جدول يمكن من تحديد الأعداد الأولية الأصغر من عدد صحيح طبيعي

معلوم N ، مثلا بالنسبة ل $N=100$ ننشئ جدولا 10×10 نكتب فيه جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية من 1 إلى 100 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

نشطب أولا على العدد 1 (لأنه ليس عددا أوليا) ، ثم نشطب بالتتابع على مضاعفات الأعداد 2 و 3 و 5 و 7 (ما عدا 3 و 5 و 7 لأنها أعدد أولية)

و الأعداد التي لم يشطب عليها لا تقبل القسمة على الأعداد الأولية : 2 ، 3 ، 5 ، 7 (التي مربعاتها أصغر من 100) ، إذن فهذه الأعداد كلها أعداد أولية .

3)- التفكيك إلى جداء عوامل أولية:

- **خاصية:**

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل جداء من عوامل أولية .

- **مثال:**

لننجز تفكيكي العددين 108 و 315 إلى جداء عوامل أولية :

إذن : $108=2^2\times3^3$		2	2	3	3	3
	108	54	27	9	3	1
إذن : $315=3^2\times5\times7$			3	3	5	7
	315		105	35	7	1

- **تطبيقات:**

. القاسم المشترك الأكبر $a\wedge b$ لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو جداء العوامل المشتركة مرفوعة إلى أصغر أس في تفكيكي a و b .

و المضاعف المشترك الأصغر $a\vee b$ لعددين صحيحين طبيعيين a و b هو جداء العوامل المشتركة و غير المشتركة مرفوعة إلى أكبر أس في تفكيكي a و b .

- **مثال:**

فكك العددين $a=304$ و $b=632$ إلى جداء عوامل أولية ، ثم إستنتج $304\wedge632$ و $304\vee632$.

	2	2	2	2	19
304	152	76	38	19	1

إذن : $304=2^4\times19$.

	2	2	2	79
632	316	158	79	1

إذن : $632=2^3\times79$

و بالتالي فإن : $304\wedge632=2^3=8$ و $304\vee632=2^4\times19\times79=24016$.

abouzakariya@yahoo.fr