التمرين الأول :

1) إعادة الرسم :

من التمثيل البياني نلاحظ أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد -1 فهي متقاربة .

2) البرهان بالتراجع $-3 \le u_n < -1$

لدينا $-3 \le u_0 < -1$ محققة لأن $-3 \le -3 < -1$

نفرض أن $-3 \le u_n < -1$ و لنبرهن أن $-3 \le u_{n+1} < -1$.

$-3 \le u_n < -1$ و الدالة f متزايدة على المجال $[-3;-1]$ و منه $f(-3) \le f(u_n) < f(-1)$ أي أن

$-3 \le -\frac{5}{2} \le u_{n+1} < -1$ بما أن $-3 \le u_{n+1} < -1$ و منه محققة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-3 \le u_n < -1$.

3) أ-إثبات أن $u_{n+1}+1 \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$: لدينا $u_{n+1}+1 = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}+1 = \frac{u_n^2+u_n}{u_n-1} = \frac{u_n}{u_n-1}(u_n+1) = \left[1+\frac{1}{u_n-1}\right](u_n+1)$ و

$-3 \le u_n < -1$.....(1) و منه $-4 \le u_n - 1 < -2$ بالقلب نجد $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_n-1} < -\frac{1}{4}$.....(2) لأن دالة مقلوب متناقصة على المجال $[-4;-2]$ و منه بإضافة 1 نجد $\frac{1}{2} \le 1+\frac{1}{u_n-1} < \frac{3}{4}$ و $-2 \le u_n+1 < 0$ بالضرب في (u_n+1) إذن

$\left[1+\frac{1}{u_n+1}\right](u_n+1) > \frac{3}{4}(u_n+1)$ أي أن $(u_{n+1}+1) > \frac{3}{4}(u_n+1)$ و منه $(u_{n+1}+1) \ge \frac{3}{4}(u_n+1)$

ب-استنتاج : من ما سبق $(u_n+1) \ge \frac{3}{4}(u_{n-1}+1)$ و منه $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^2(u_{n-2}+1)$ و هكذا نجد $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^n(u_{n-n}+1)$

أي أن $(u_n+1) \ge \left(\frac{3}{4}\right)^n(u_0+1)$ بالتعويض نجد $(u_n+1) \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

بما أن $0 \ge (u_n+1) \ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $\lim\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$ نستنتج بالحصر أن $\lim(u_n+1) = 0$ و منه $\lim u_n = -1$

4) إثبات أن $(u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \le 0$ لدينا : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \le (u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \le 0$ و منه $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n \le u_n+1 \le 0$

$-2\left(\frac{3}{4}\right)^0 - 2\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \ldots - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \le (u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \le 0$ مجموعة حدود متتابعة من متتالية هندسية و منه

أي أن $-2\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{4}-1} \le (u_0+1)+(u_1+1)+\ldots+(u_n+1) \le 0$

$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le(u_0+1)+(u_1+1)+...+(u_n+1)\le 0$ و هو المطلوب

و منه $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le S_n+(n+1)\le 0$ إذن $S_n\le -(n+1)$ و $\lim[-(n+1)]=-\infty$ بالمقارن نستنتج أن $\lim S_n=-\infty$

التمرين الثاني

1) أ-إثبات أن النقط $O;A;B$ ليست في استقامية لدينا $\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ و $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ و $\frac{1}{1}\neq 0$ و منه النقط $O;A;B$ ليست في استقامية .

ب- التحقق $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (OAB) نحسب الجداءات السلمية $\overrightarrow{OA}.\vec{n}=2+1-3=0$ و $\overrightarrow{OB}.\vec{n}=2+0-2=0$ و منه محققة .

المعادلة الديكارتية $2x+y-z+d=0$ و $B\in(OAB)$ يعني أن $2(1)+(0)-2+d=0$ و منه $d=0$ إذن $2x+y-z=0$ هي المعادلة الديكارتية للمستوي (OAB).

2) إثبات مجموعة النقط هي تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين $[OA]$, $[OB]$: لدينا

$(2x+2y+6z-11)^2+(2x+4z-5)^2=0$ يكافئ $\begin{cases}2x+4z-5=0\\ \text{و}\\ 2x+2y+6z-11=0\end{cases}$ و هي تقاطع مستويين .

نلاحظ أن $\overrightarrow{OA}(1;1;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x+2y+6z-11=0$ يكافئ $x+y+3z-\frac{11}{2}=0$ و منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$ الذي إحداثياته $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ينتمي لهذا المستوي لأن $2\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)+6\left(\frac{3}{2}\right)-11=0$ يعني $1+1+9-11=0$ محققة و منه هذا المستوي هو محور للقطعة المستقيمة $[OA]$

نلاحظ أن $\overrightarrow{OB}(1;0;2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x-4z-5=0$ يكافئ $x-2z-\frac{5}{2}=0$ و منتصف القطعة المستقيمة $[OB]$ الذي إحداثياته $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ ينتمي لهذا المستوي لأن $2\left(\frac{1}{2}\right)+4(1)-5=0$ يعني $1+4-5=0$ محققة و منه هذا المستوي هو محور للقطعة المستقيمة $[OB]$.

التمثيل الوسيطي $\begin{cases}2x+4z-5=0\\2x+2y+6z-11=0\\z=t\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\2x+2y+6z-11=0\\z=t\end{cases}$ و منه $\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\-4t+5+2y+6t-11=0\\z=t\end{cases}$ إذن

(Δ) هو التمثيل الوسطي للمستقيم $\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\y=-t+3\\z=t\end{cases}:t\in IR$

3) البرهان : $M\in(\Delta)$ يكافئ أن $\begin{cases}MO=MA\\MO=MB\end{cases}$ لان M تنتمي إلى نقطة تقاطع محوري القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ يكافئ $MO=MA=MB$.

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAB هي نقطة تقاطع المحاور في هذا المثلث و منه هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوي (OAB)

و منه $2\left(-2t+\frac{5}{2}\right)-t+3-t=0$ إي أن $-6t+8=0$ و منه $t=\frac{4}{3}$ بالتعويض في التمثيل الوسيطي نجد

$$\begin{cases} x=-2t+\frac{5}{2} \\ y=-t+3 \\ z=t \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

و منه $\Omega\left(-\frac{1}{6};\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{6} \\ y=\frac{5}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$$

التمرين الثالث :

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $\left(z^2-2z+2\right)\left(z^2-2\sin\theta.z+1\right)=0$ يكافئ و $\begin{cases} z^2-2z+2=0 \\ z^2-2\sin\theta.z+1=0 \end{cases}$ و منه

نحسب مميز المعادلة الأولى و هو $\Delta=-4$ إذن للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{cases}$

نحسب مميز المعادلة الثانية و هو $\Delta=4\sin^2\theta-4=-4\cos^2\theta$ إذن للمعادلة حلين هما $\begin{cases} z_3=\sin\theta+i\cos\theta \\ z_4=\sin\theta-i\cos\theta \end{cases}$

و منه للمعادلة الأصلية أربع حلول السابقة الذكر .

II - النقط ذات اللواحق التالية : $z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $z_B=1-i$; $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$; $z_D=\overline{z_C}$.

1) الكتابة على الشكل ألأسي : $z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left[\frac{5\pi}{4}+\pi\right]}=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و

$z_C=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ و منه $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ و $z_D=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$.

2) لدينا $z_E=\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=e^{i\frac{10\pi}{4}}=e^{i\frac{5\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ و منه $z_D=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ و منه

$|z_D|=|z_C|=|z_E|=1$ و منه النقط C ; D ; E تنتمي إلى الدائرة المثلثة التي مركزها O و نصف قطرها 1.

3) التشابه S الذي مركزه A و نسبته $\left(2\sqrt{2}-2\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

لدينا $S(C)=B$ يعني $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_C=\frac{z_B-z_A}{\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}+z_A$ و $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$

أي $z_C=-\frac{2i}{\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}+1+i$ و منه $z_C=-\frac{2i}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}e^{-i\frac{\pi}{4}}+1+i$ يعني $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{-\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}+1+i$ و

منه $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}(1+i)$ يكافئ $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}e^{\frac{\pi}{4}i}$ أي أن $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\left(2-2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}e^{\frac{\pi}{4}i}$

و منه $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\left(-2+2\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{2}-2\right)}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ أي $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=e^{\frac{5\pi}{4}i}$ و منه $\frac{\pi}{2}-\theta\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ يكافئ $-\theta\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ و منه

$\theta\equiv-\frac{3\pi}{4}$.

4) نضع $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ و منه $z_D=e^{-\frac{5\pi}{4}i}$ يكافئ $z_D^n=e^{-\frac{5\pi}{4}ni}$ تخيلي صرف يعني أن $-\frac{5n}{4}\pi\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ يكافئ

$-\frac{5n}{4}\equiv\frac{1}{2}[1]$ يكافئ $-5n\equiv2[4]$ يكافئ $-n\equiv2[4]$ يكافئ $n\equiv-2[4]$ يكافئ $n\equiv2[4]$ و منه

$n=2+4k\ :\ k\in\mathbb{N}$

التمرين الرابع :

لدينا $f(x)=x+1-\frac{1}{\ln(x)}$ و $f(0)=1$

1) أ-إثبات استمرارية الدالة عند 0 لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=1=f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)=-\infty$ و منه محققة .

ب-حساب النهاية $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[1-\frac{1}{h\ln(h)}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[\frac{h.-\frac{1}{\ln(h)}}{h.}\right]$ $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}h\ln(h)=0^-$

و تفسيرها الهندسي هو أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازي لحامل محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

2) أ- حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[x+1-\frac{1}{\ln(x)}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln(x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\ln(x)=0^-$.

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة : المشتقة $f'(x)=1+\frac{1}{x[\ln(x)]^2}$ و هي موجبة على المجالين $]1;+\infty[$; $]0;1[$ و الدالة متزيدة على المجالين $]1;+\infty[$; $]0;1[$.

جدول تغيراتها

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$ $+\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	

3) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ $(\Delta):y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة الوضعية $[f(x)-(x+1)]=\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]$ و هي موجبة على المجال $]0;1[$ و سالبة على المجال $]1;+\infty[$ و منه (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]0;1[$ و تقع تحته على المجال $]1;+\infty[$.

4) إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات α حيث $1{,}49<\alpha<1{,}5$

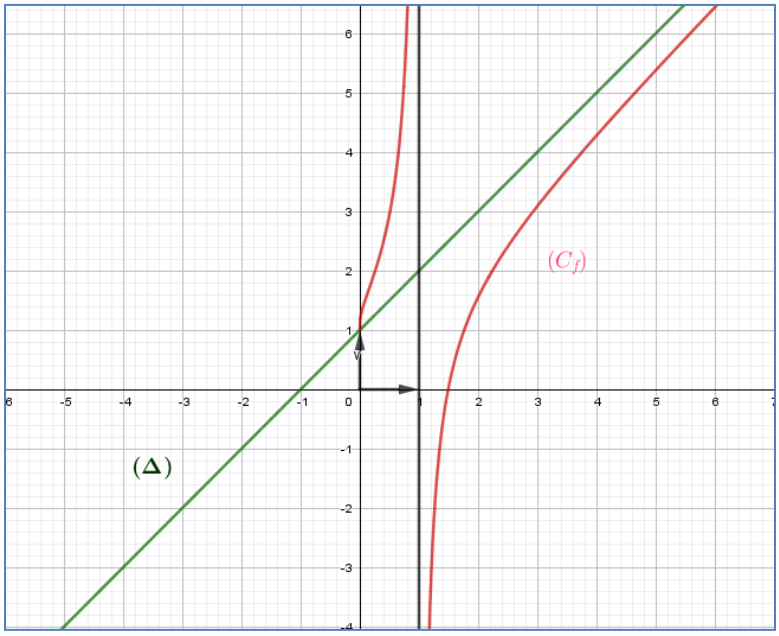
لدينا $f(1,49)=-0,07$ و $f(1,5)=0,03$ و الدالة مستمرة و متزايدة على $]1;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α.

معادلة المماس عندها هي من الشكل $y=f'(\alpha)(x-\alpha)$ بتعويض المشتقة نجد $y=\left[1+\frac{1}{\alpha(\ln(\alpha))^2}\right](x-\alpha)$ بما أن

$f(\alpha)=0$ و منه $\alpha+1-\frac{1}{\ln(\alpha)}=0$ أي أن $\frac{1}{\ln(\alpha)}=\alpha+1$ و منه المعادلة $y=\left[1+\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right](x-\alpha)$ يعني أن

$y=\left[1+\frac{\alpha^2+2\alpha+1}{\alpha}\right](x-\alpha)$ و منه $y=\left[\alpha+3+\frac{1}{\alpha}\right](x-\alpha)$ و هو المطلوب .

5) رسم المنحنى (C_f) :



6) لدينا $h(x)=1-x+x.\ln(x)$

أ - المشتقة $h'(x)=-1+\ln(x)+1=\ln(x)$ و هي موجبة على $[1;+\infty[$ إذن الدالة h متزايدة على هذا المجال .

لدينا $h(1)=0$ و و هي قيمة حدية صغرى و هي دالة متزايدة إذن h دالة موجبة على المجال $[1;+\infty[$.

ب -لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f(x)-x+\frac{1}{x\ln(x)}=1-\frac{1}{\ln(x)}+\frac{1}{x\ln(x)}=\frac{x\ln(x)-x+1}{x\ln(x)}=\frac{h(x)}{x\ln(x)}$$

و منه إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)-x+\frac{1}{x\ln(x)}>0$ إذن $f(x)>x-\frac{1}{x\ln(x)}.....(1)$

إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فإن $f(x)-x-1=-\frac{1}{\ln(x)}$ عدد سالب تماما إذن $f(x)<x+1.....(2)$

من (1) و(2) نجد أنه لما $x\in]1;+\infty[$ فإن $x-\frac{1}{x\ln(x)}<f(x)<x+1$

7- مساحة الحيز المطلوبة هي $A=u.a.\int_\alpha^e f(x)dx$ و $x-\frac{1}{x\ln(x)}<f(x)<x+1$ على المجال $[\alpha;e]$ و منه

$\int_\alpha^e\left(x-\frac{1}{x\ln(x)}\right)dx<\int_\alpha^e f(x)dx<\int_\alpha^e(x+1)dx$ و منه $\left[\frac{1}{2}x^2-\ln|\ln(x)|\right]_\alpha^e<A<\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_\alpha^e$ أي أن

$\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)+\ln(|\ln(\alpha)|)<A<\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha$ بما أن $f(\alpha)=0$ فإن و $\ln(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}$ منه

$\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(1+\alpha)<A<\frac{1}{2}(e^2-\alpha^2)+e-\alpha$ و هو المطلوب

و منه نجد $\frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)+\ln\left(\left|\ln(\alpha)\right|\right)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha)+\frac{2(e-\alpha)}{2}$

$$\frac{1}{2}\left(e^2-\alpha^2\right)+\ln\left(\left|\ln(\alpha)\right|\right)<A<\frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

انتهى تصحيح الموضوع الأول

الأستاذ جواليل أحمد أسامة – ثانوية الشيخ أمود تمنغست 2018

التمرين الأول :

1) لدينا $\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$ بالجمع نجد $2\alpha=4036$ و منه $\alpha=2018$ بالتعويض نجد $2018-\beta=1$ و منه $\beta=2017$

و منه $\frac{\alpha}{2}=1009$ و $\beta=2017$ بما أن $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\beta=1$ فحسب نظرية بيزو العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما .

2) لدينا $2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\beta=1$ أي أن $1009(2)-2017(1)=1.....(1)$ و $1009x-2017y=1....(2)$ بطرح (1)من(2) نجد

$1009(x-2)=2017(y-1)$ بما أن 2017 و 1009 أوليان فيما بينهما نجد 2017 قاسم للعدد $(x-2)$ و 1009 قاسم للعدد $(y-1)$ أي أن $\begin{cases}x-2=2017k\\ y-1=1009k\end{cases}:k\in Z$ و منه $\begin{cases}x=2+2017k\\ y=1+1009k\end{cases}:k\in Z$ مجموعة الحلول هي

$S=\{(2+2017k;1+1009k):k\in Z\}$.

3) تعيين العدد a حيث $\begin{cases}a\equiv 2019[2017]\\ a\equiv 2019[1009]\end{cases}$ يعني أن $\begin{cases}a\equiv 2019+2017x_1\\ a\equiv 2019+1009y_1\end{cases}$ حيث x_1 و y_1 عددان صحيحان و منه بالطرح

نجد $2017x_1=1009y_1$ بما أن 1009 و 2017 أوليان فيما بينهما فإن 2017 قاسم للعدد y_1 و 1009 قاسم للعدد x_1

أي أن $x_1=1009k'$ و $y_1=2017k'$ إذن $a=1009\times 2017k'+2019$ و k' عدد صحيح و منه

$a=2035153k'+2019:\ k'\in Z$.

4) أ-دراسة بواقي قسمة 7^n على 9

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$7^n\equiv$	1	7	4	$[9]$

ب-لدينا $L=\overbrace{111...1}^{2018\text{مرة}}{}^{7}$ يعني أن $L=1+7+7^2+....+7^{2017}$ و منه $L=\frac{7^{2018}-1}{7-1}=\frac{1}{6}\left(7^{2018}-1\right)$ إذن

$42L=7\left(7^{2018}-1\right)=7^{2019}-7$ إيجاد باقي القسمة بما أن $2019=3(673)$ فإن $7^{2019}\equiv 1[9]$ و $-7\equiv 2[9]$ بالجمع نجد

$42L\equiv 3[9]$ الباقي المطلوب هو 3 .

التمرين الثاني

1) حساب الاحتمالات

عدد الحالات الممكنة الكلية $C_9^4=126$.

$P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\frac{5}{126}$ و $P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\frac{126}{126}=1$

الكريات مجموع أرقامها معدوم $\{-3;-1;2\}$ و $\{-3;-1;1;3\}$ و لدينا أربع كرات تحمل الرقم 2 و كرة تحمل الرقم -1 و كرة تحمل الرقم -3 و كرتين تحملان الرقم 1 و كرة وحيدة تحمل الرقم 3 منه

$P(C)=\frac{C_1^1\times C_1^1\times C_4^2+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\times C_1^1}{126}=\frac{6+2}{126}=\frac{8}{126}=\frac{4}{63}$.

2) أ-قيم المتغير X هي 0 و 1 و 2 و 3 .

قانون الاحتمال

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}$	$\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}$	$\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}$	$\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}$

ب-حساب الأمل ألرياضياتي : $E(X)=0\left(\frac{15}{126}\right)+1\left(\frac{60}{126}\right)+2\left(\frac{45}{126}\right)+3\left(\frac{6}{126}\right)=\frac{60+90+18}{126}$ و منه

$E(X)=\frac{168}{126}=\frac{4}{3}$.

ج-حساب احتمال الحادثة $X^2-X>0$ أي أن $X=2$ أو $X=3$ و منه $P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)$ أي

أن $P(X^2-X>0)=\frac{45+6}{126}=\frac{51}{126}=\frac{17}{42}$.

التمرين الثالث :

1) المعادلة $z^2+(m+1)z+(2m-1)=0$: نحسب المميز $\Delta_m=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5$ المميز يقبل جذرين هما 1 و 5 و منه حتى تقبل المعادلة حلين تخيلين صرفيين يجب أن يكون المميز سالب تماما أي أن $m\in]1\ ;\ 5[$.

2) نضع $m=3$ و منه $\Delta_3=-4$ للمعادلة حلين هما $z_1=2-2i$ و $z_2=2+2i$

3) لدينا $z_A=-2+i$ و $z_B=-2-i$ و $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$

حتى يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع

يجب أن يكون $|z_A-z_B|=|z_C-z_B|=|z_C-z_A|$ يعني $|2i|=|\alpha+2+i|=|\alpha+2-i|$ بما $|\alpha+2+i|=|\alpha+2-i|$ محققة

نجد أن $|2i|=|\alpha+2+i|$ كافي

طريقة 1 :

بالتربيع نجد $|2i|^2=|\alpha+2+i|^2$ و منه $4=(\alpha+2)^2+1$ يعني أن $\alpha^2+4\alpha+1=0$ نحسب المميز

$\Delta=16-4=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

و منه $\alpha=-2-\sqrt{3}$ (هو مرفوض) آو $\alpha=-2+\sqrt{3}$ هو الحل المقبول

الطريقة 2 : بتعويض قيمة $\alpha=-2+\sqrt{3}$ نجد $|2i|=\left|-2+\sqrt{3}+2+i\right|$ يكافئ $|2i|=\left|\sqrt{3}+i\right|$ محققة لان طويلة العددين هو 2

4) كتابة العدد $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل ألأسي $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=\frac{-2}{2i}=i$ و منه $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

أ - و منه $\arg\left(\frac{z_C-z_E}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$ يعني أن $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{EC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه المستقيمان (BA) و (EC) متعامدان .

ب -النقط $A\ ;\ B\ ;\ E$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها ذو اللاحقة $z_w=x+iy$ يعني أن $wA=wB=wE$ يعني

$|x+2+i(y-1)|=|x+2+i(y+1)|=|x-\sqrt{3}+iy|$ يكافئ

$(x+2)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2=\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2$ يكافئ

$\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2\\(x+2)^2+(y+1)^2=\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y=0\\x^2+4x+5=x^2-2x\sqrt{3}+3\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}y=0\\\left(2\sqrt{3}+4\right)x=-2\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}y=0\\x=-2+\sqrt{3}\end{cases}$ و منه مركز الدائرة (γ) هي نفسها النقطة C حيث $z_C=-2+\sqrt{3}$

و نصف قطرها هو $CA=|z_C-z_A|=|\sqrt{3}-i|=2$

5) لدينا $r:z'=az+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

أ - حساب a : أي أن $a=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_C}$ و منه $a=\frac{-2+\sqrt{3}+2-i}{-2-i+2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}$ إذن $a=\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{-4}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-4}$

$a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

زاوية الدوران هي $\arg(a)=\theta$ حيث $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\theta=\frac{2\pi}{3}$ و هي زاوية الدوران .

ب-التحقق $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ تكون G هي مركز الدوران يعني $r(G)=G$ أي أن

أي أن $z_G=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_G+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

أي أن $\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$

و منه $\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\left(\frac{3}{-6+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$

و منه $\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$

و منه محققة . $\frac{-6+\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

التمرين الربع :

I - لدينا $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$

1) المشتقة : $g'(x)=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $g'(x)=\frac{1}{x^2}(1+x+2x^2+2x^3)e^{-\frac{1}{x}}$ أي أن

$g'(x)=\frac{1}{x^2}[(1+x)+2x^2(1+x)]e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $g'(x)=\frac{(1+x)(1+2x^2)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ و هو المطلوب .

إشارة المشتقة من إشارة $1+x$: و هي موجبة على $]0;+\infty[$ إذن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال .

2) إثبات أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد الدالة g متزايدة تماما و مستمرة على $]0;+\infty[$ و $g(1)=0,1$ و $g(0,9)=-0,1$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حلا و حيداً α حيث $0,9<\alpha<1$.

إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$-$	0	$+$

II - لدينا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

1) أ-حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{1}{x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=0$.

ب-إثبات المشتقة $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ و منه $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[-1+(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}\right]$ إذن

$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0\ ;\ \alpha]$.

جدول تغيراتها

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) إثبات النهاية

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} t=0$ و منه

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{-t}$ باستخدام العدد المشتق نضع $k(t)=e^t$ و $k(0)=1$ و منه نجد أن $k'(t)=e^t$ و منه

$k'(0)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-\lim\limits_{t\to0}\frac{k(t)-k(0)}{t-0}=-k'(0)=-1$ و هو المطلوب .

لدينا $f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x$ و منه $f(x)-x=\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)$ النهاية

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=1-1=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-\frac{1}{x}}\right]=1$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ و منه (Δ) مستقيم مقارب جهة $+\infty$ للمنحنى (C_f) .

3) لدينا $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$

أ - حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=-1+1=0$

المشتقة $h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{\left(-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$ إشارتها من إشارة $-1+e^{-\frac{1}{x}}$

$-1+e^{-\frac{1}{x}}<0$ يكافئ $e^{-\frac{1}{x}}<1$ أي أن $-\frac{1}{x}<0$ محققة و منه الدالة h متناقصة على $]0;+\infty[$

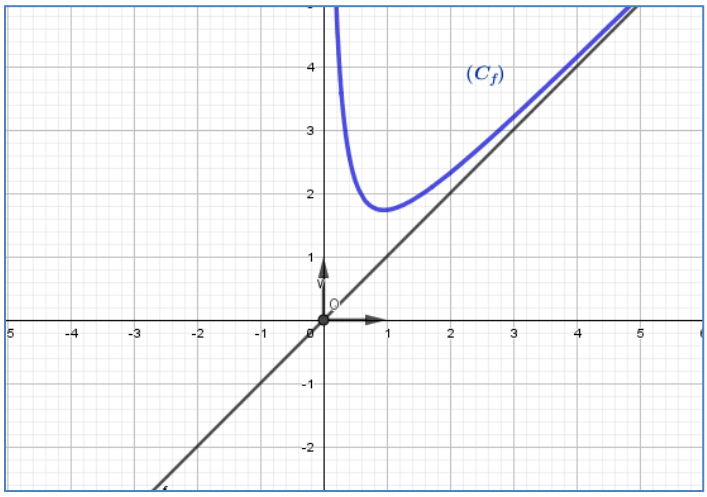
بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ و الدالة h متناقصة على $]0;+\infty[$ فإن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ ..

ب -التحقق : $[f(x)-x]=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=(1+x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-x^2}{x}$ و منه $[f(x)-x]=(1+x)\left[e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1-x}{x}\right]$ إذن

$$[f(x)-x]=(1+x)\left[e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}-1\right]=(1+x).h(x)$$

بما أن h موجبة على المجال $]0;+\infty[$ فإن $[f(x)-x]$ موجبة على $]0;+\infty[$ إذن (C_f) يقع فوق (Δ) على $]0;+\infty[$.

4) رسم المنحنى (C_f) و المستقيم المقارب (Δ)



5) المتتالية (u_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة

كما يلي $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$.

أ - كتابة عبارة الحد العام

$$u_n=\frac{n}{n+1}\left[n+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right]-\frac{n^2}{n+1}$$ و منه

$$u_n=\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}$$ إذن $u_n=e^{-n}$

بما أن $u_n=e^{-n}$ أي أن $u_n=\left(\frac{1}{e}\right)^n$ فإن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{1}{e}\right)$ و حدها الأول $u_1=\left(\frac{1}{e}\right)$.

ب -حساب المجموع $S_n=\left[\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right]+....+\left[\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right]$ لدينا $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$

و منه $u_n+\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)$ أي أن $u_n+\frac{n^2}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$ يعني أن

و منه المجموع يصبح $u_n+n-1=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$ يكافئ $u_n+\frac{n^2-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$

$S_n=[u_1+1-1]+[u_2+2-1]+....+[u_n+n-1]$ مجموع متتاليتين حسابية و هندسية

و $S_n=\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{1-e}+\frac{n}{2}(n-1)$;إذن $S_n=\left(\frac{1}{e}\right)\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}+\frac{n}{2}(n-1)$ و منه $S_n=u_1\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}+\frac{n}{2}(0+n-1)$

منه $S_n=\frac{1-e^n}{e^n-e^{1+n}}+\frac{n}{2}(n-1)$ و هو المطلوب .